

GE2 - Tutorato II

Livia Corsi e Chiara Del Vescovo

7 ottobre 2004

ESERCIZIO 0:

- (a) Trovare la forma quadratica associata alla matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Trovare la matrice associata alla forma quadratica

$$q(\mathbf{x}) = 2x^2 + 2xy$$

- (c) Trovare un collegamento teorico tra i punti (a), (b), e l'esercizio 1 della scorsa settimana.

1. Diagonalizzare con l'algoritmo di Lagrange la forma bilineare simmetrica b su \mathbb{R}^3 definita (rispetto alla base canonica \mathbb{E} di \mathbb{R}^3) dalla matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sia q la forma quadratica su \mathbb{R}^4 definita rispetto ad una base $\mathbb{E} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3 \ \mathbf{e}_4)$ di \mathbb{R}^4 dalla matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare l'espressione di q e della forma bilineare simmetrica b associata a q
- (b) Ridurre b in forma diagonale (con il metodo di Lagrange), determinando l'espressione di b ed una base b -diagonalizzante \mathbb{F} di \mathbb{R}^4 .

(c) Determinare il rango e la segnatura di b e scriverne la matrice canonica.

3. Date le seguenti forme bilineari simmetriche, scrivere la forma quadratica associata e dire se si tratta di prodotti scalari.

(a) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_3y_3$

(b) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_1 - x_3y_1 + 2x_1y_2 + 5x_2y_2 - x_1y_3 + 3x_3y_3$

(c) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_2y_2$

(d) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2$

Scritta poi la matrice associata, se si tratta di un prodotto scalare determinare una base ortogonale diagonalizzante, altrimenti scrivere la matrice canonica e determinare la segnatura.

4. Sia q la forma quadratica $q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + x_3^2$ rappresentata nella base canonica $\mathbb{E} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)$ di \mathbb{R}^3

(a) Scrivere la matrice \mathcal{A} della forma bilineare simmetrica b associata a q .

(b) Verificare che il vettore $\mathbf{x}_0 = (-1, 0, 1)$ non è b -isotropo.

(c) Determinare due vettori \mathbf{y}' e $\mathbf{y}'' \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{y}' + \mathbf{y}'' = \mathbf{e}_3$ con $\mathbf{y}' \parallel \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}'' \perp \mathbf{x}_0$.

(d) Determinare le equazioni cartesiane di \mathbf{e}_3^\perp e due suoi generatori.