GE2 - Tutorato I

Livia Corsi e Chiara Del Vescovo

30 settembre 2004

1. (a) Sia data la matrice simmetrica:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalizzare $\mathcal{A}$ utilizzando il metodo visto a lezione.

(b) Sia data la forma quadratica:

$$q(\mathbf{x}) = 2x^2 + 2xy$$

Eliminare il termine misto utilizzando il metodo visto a lezione.

(c) Trovare un collegamento teorico tra i due punti precedenti.

2. Sia b la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$ definita rispetto ad una base $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$ dalla matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che b é non degenere.

(b) Posto $\mathcal{W} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \rangle$, determinare le equazioni di $\mathcal{W}^\perp$.

(c) Verificare che $\mathcal{W} \bigcap \mathcal{W}^\perp = \langle 0 \rangle$.

(d) Determinare i vettori b-isotropi in $\mathcal{W}^\perp$.

3. Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare cosí definita rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^4$:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 - 2x_2 y_4 + x_3 y_3$$
$$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

(a) Scrivere la matrice $\mathcal{A}$ di b rispetto ad $\mathbb{E}$.

(b) Verificare che b é una forma degenere ed individuare due vettori non nulli, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^4$ t.c.:
$b(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = 0 \ \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ e $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$

(c) Sia $\mathbb{E}' = (\mathbf{e}_1' \quad \mathbf{e}_2' \quad \mathbf{e}_3' \quad \mathbf{e}_4')$ la base di $\mathbb{R}^4$ cosÃň definita:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_2' &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{e}_3' &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_4' &= \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Scrivere l'espressione di b rispetto ad $\mathbb{E}'$.

4. Consideriamo le seguenti espressioni.

(a) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - x_2y_1 + 3x_3y_3 - 2x_3y_2$

(b) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 + y_2 + 2x_2y_3 - 3y_1$

(c) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + 4x_1y_3 + 3x_3y_3 - x_2y_2 + 3x_2y_3$

(d) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_1 + 2x_3y_2 + 2x_3y_3$

(e) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_3 + \sqrt{(x_2y_2)^2}$

Per ognuna di esse, verificare se si tratta di una forma bilineare e, in caso affermativo, rispondere anche alle seguenti domande:

(i) Scrivere la matrice $\mathcal{A}$ associata a b rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$.

(ii) Dire se é degenere e, se sí individuare almeno un vettore non nullo $\mathbf{x}_0$ t.c. $b(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = 0 \ \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Sia $\mathbb{E}' = (\mathbf{e}_1' \quad \mathbf{e}_2' \quad \mathbf{e}_3')$ dove:

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1.$$

Scrivere la matrice di b rispetto a $\mathbb{E}'$.