AM2: Tracce delle lezioni- IX Settimana

DERIVATE PARZIALI Sia f definita in A, $D_r(u_0) \subset A$, $u_0 = (x_0, y_0)$. Se $x \to f(x, y_0)$ é derivabile in x_0, diremo che f é (parzialmente) derivabile rispetto alla x in u_0 e scriveremo

$$f_x(u_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) : = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{d}{dx} f(x, y_0)_{|x=x_0}$$

$$f_y(u_0) := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \frac{d}{dy} f(x_0, y)_{|y=y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} \quad \text{(se esiste, finito).}$$

Sia O aperto: $f \in C^1(O)$ se $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y := \frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e sono continue in O.

ESEMPI 1. (i) $f(x, y) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} y + \ldots + a_{n-1}\, x y^{n-1} + a_n\, y^n$, $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$, $f(x, y) = \sin xy$ sono di classe $C^1(\mathbf{R}^2)$

(ii) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$ é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0))$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Ricordiamo che f non é continua in zero. Dunque, una funzione

f **puó avere derivate parziali in un aperto O senza essere continua in O.**

A futura memoria: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{1}{y}$ $\forall y \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0, 0)$.

(iii) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$ é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0))$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Ricordiamo che f é continua anche in zero. Di nuovo, a futura memoria,

$|\frac{\partial f}{\partial x}(t, t)| = \frac{1}{2}$ per $t \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0, 0)$.

DERIVATE DIREZIONALI Sia f definita in A, $D_r(u_0) \subset A$, $u_0 = (x_0, y_0)$. Se $t \to f(u_0 + th)$ é derivabile a destra in $t = 0$, diremo che f é derivabile nella direzione h in u_0 e scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial h}(u_0) := \frac{d}{dt} f(u_0 + th)_{|t=0^+} := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(u_0 + th) - f(u_0)}{t}$$

ESEMPI 2. (k) f come in (ii): $f(0,0)=0$, $f(tx,ty)=\frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(0,0)$ non esiste per $h \in \mathbf{R}^2$, diverso da $(x,0)$, $(0,y)$.

(kk) $f(x,y) = \frac{x^4 y}{x^6+|y|^3}$, $f(0,0)=0$. É $\frac{f(tx,ty)}{t} = \frac{tx^4 y}{t^3x^6+|y|^3} \rightarrow_{t\to 0^+} 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=0\ \forall h \in \mathbf{R}^2$. Siccome $f(x,x^2) \equiv \frac{1}{2}$, vediamo che

$$\exists\ \frac{\partial f}{\partial h}(u_0)\ \forall h \in \mathbf{R}^2 \quad \textbf{non implica} \quad f \textbf{ continua in } u_0\textbf{.}$$

(kkk) Se $f(u)=||u||$: $f(tu)=tf(u)\ \forall t \ge 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=f(h)\ \forall h \in \mathbf{R}^2$. Notiamo che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esistono $(f(x,0)=|x|\ !)$:

$$\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(u) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial(1,0)}(u) = -\frac{\partial f}{\partial(-1,0)}(u)$$

(kkkk) f come in (iii): $f(tx,ty)=t\frac{x^2y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=f(h)\ \forall h \in \mathbf{R}^2$.

PRODOTTO SCALARE Se $u_1=(x_1,y_1), u_2=(x_2,y_2)$,

$< u_1,u_2 > := x_1\, x_2 + y_1\, y_2$ é il prodotto scalare tra u_1 ed u_2. Proprietá

positivitá $0 \le < u,u > = ||u||^2,\ \forall u \in \mathbf{R}^2$

simmetria $< u,v > = < v,u >\ \forall u,v \in \mathbf{R}^2$

bilinearitá $< au+bv,h > = a < u,h > + b < v,h >\ \forall a,b \in \mathbf{R}$

ortogonalitá $< u,v > = 0 \Leftrightarrow$ le rette $\mathbf{R}u$, $\mathbf{R}v$ sono tra loro ortogonali

Diseguaglianza di Cauchy-Schwartz $|< u,v >| \le ||u||\,||v||\ \forall u,v \in \mathbf{R}^2$

Infatti $0 \le < u+tv, u+tv > = ||u||^2 + 2t < u,v > + t^2||v||^2\ \forall t \Rightarrow < u,v >^2 - ||u||\,||v|| \le 0$.

FUNZIONI LINEARI $l : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ é lineare se

$l(au+bv) = a\, l(u) + b\, l(v) \quad \forall a,b \in \mathbf{R},\ u,v \in \mathbf{R}^2$

Se $h \in \mathbf{R}^2$, $l(u) := < u,h >$ é lineare . Viceversa, se l é lineare:

$u=(x,y) \Rightarrow l(u)=l(x,y) = x\,l(1,0)+y\,l(0,1) = < u,h >, \quad h := (l(1,0)\,, l(0,1))$

DIFFERENZIABILITÁ, DIFFERENZIALE, GRADIENTE

Sia f definita in A, $D_r(u_0) \subset A$, $u_0 = (x_0, y_0)$. Se esiste l lineare tale che

$$f(u_0 + h) - [f(u_0) + l(h)] = \circ(||h||) \quad \text{per} \quad ||h|| \to 0$$

f si dice differenziabile in u_0 e $df(u_0) := l$ é il differenziale di f in u_0.

Il vettore v tale che $df(u_0)\,(h) =< v, h > \;\; \forall h \in \mathbf{R}^2$ si chiama gradiente di f in u_0 e si denota $\nabla f(u_0)$: $df(u_0)\,(h) = < \nabla f(u_0), h > \;\; \forall h \in \mathbf{R}^2$

Proposizione 1 Sia f differenziabile in u. Allora

(i) f é continua in u, (ii) $\forall h \in \mathbf{R}^2$, $\exists \frac{\partial f}{\partial h}(u)$ e $\frac{\partial f}{\partial h}(u) = < \nabla f(u), h >$

In particolare, f_x, f_y esistono in u e $\nabla f(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u), \; \frac{\partial f}{\partial y}(u)\right)$.

Infatti $|f(u+h) - f(u)| \le | < \nabla f(u), h > + \circ\,(||h||)| \le (||\nabla f(u) + \circ(1))||h||$,

e quindi f é continua in u. Poi, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon$: $||h|| = 1$, $|t| \le \delta_\epsilon \Rightarrow$

$$|\tfrac{f(u+th)-f(u)}{t} - < \nabla f(u), h > | = |\tfrac{f(u+th)-f(u)-<\nabla f(u),th>}{t}| = \tfrac{\circ(||th||)}{|t|} \le \epsilon \;.$$

Proposizione 2 $f \in C^1(D_r((x,y))) \Rightarrow f$ é differenziabile in (x,y).

Prova. f_x, f_y continue $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta_\epsilon > 0$: $|\frac{\partial f}{\partial x}(w) - \frac{\partial f}{\partial x}(v)| + |\frac{\partial f}{\partial y}(w) - \frac{\partial f}{\partial y}(v)| \le \epsilon$ $\forall \; w, v \in D_r(u)$ e $|f(x+s, y+t) - f(x,y) - [\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t]| =$

$$|f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s + f(x, y+t) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t| \le$$
$$|\int_x^{x+s} [\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)]d\tau| + |\int_y^{y+t} [\frac{\partial f}{\partial y}(x,\tau) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)]d\tau| \le \epsilon(|s|+|t|) \text{ se } s^2+t^2 \le \delta_\epsilon^2.$$

Significato geometrico del differenziale

La funzione $z(u) := f(u_0) + < \nabla f(u_0), (u - u_0) >$, che approssima $f(u)$, vicino ad u_0, a meno di un $\circ(||u - u_0||)$, ha per grafico (in $\mathbf{R}^3$) il piano passante per $(u_0, f(u_0))$ e parallelo al piano passante per l'origine di $\mathbf{R}^3$ ed ortogonale al vettore $(\frac{\partial f}{\partial x}(u_0), \frac{\partial f}{\partial y}(u_0), -1)$ (piano di equazione $z :=< \nabla f(u_0), h >$).

Tale piano si chiama piano tangente in $(u_0, f(u_0))$ al grafico di $f := \{(x, y, f(x,y))$: $(x,y) \in$dominio di $f\}$.

Significato geometrico del gradiente.

$\frac{d}{dt}f(u+th) = \frac{\partial f}{\partial h}(u) =< \nabla f(u), h >$ misura la pendenza del grafico di f intersecato con il piano $\{(u+th, z) : t, z \in \mathbf{R}\}$. Siccome $\sup\limits_{||h||=1} < \nabla f(u), h >= ||\nabla f(u)||$, vediamo che $\nabla f(u)$ fornisce la direzione di massima pendenza del grafico di f in u e $||\nabla f(u)||$ é la massima pendenza di f in u.

ESEMPI 3. (j) Se $g \in C([a,b])$, $f(x,y) := \int\limits_x^y g(t)dt$, $x, y \in [a,b] \times [a,b]$, é $\frac{\partial f}{\partial x} = -g(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = g(y)$, $x, y \in (a,b)$ e quindi $f \in C^1((a,b) \times (a,b))$.

(jj) f in 1-(ii) ha derivate parziali nulle in $(0,0)$ ma, essendo discontinua in $(0,0)$ non é ivi differenziabile . Per la stessa ragione, la f in 2-(kk), che ha derivate direzionali (tutte nulle) non é differenziabile in $(0,0)$. La f in 1-(iii), continua e derivabile in tutte le direzioni in $(0,0)$, non é ivi differenziabile, perché $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = f(h)$ non dipende linearmente da h.

(jjj) Sia $f(x,y) = \frac{x^2 y \sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2}$, $f(0,0) = 0$. Siccome $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, f é continua in $(0,0)$. Inoltre $f(tx,ty) = \frac{|t|t\, x^2 y \sqrt{x^2+y^2}}{t^2x^4+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = 0$ $\forall h \in \mathbf{R}^2$. Anche qui peró f non é differenziabile in $(0,0)$: $g := \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ non va a zero per x^2+y^2 tendente a zero, giacché $g(x,x^2) \equiv \frac{1}{2}$.

Anche, $\sup\limits_{x^2+y^2=1} \frac{f(tx,ty)}{t} \geq \sup\limits_{|y|\leq 1} \frac{t\,(1-y^2)y}{t^2(1-y^2)^2+y^2} \geq \frac{t^2\,(1-t^2)}{t^2(1-t^2)^2+t^2} \to_{t\to 0} \frac{1}{2}$.

Il Teorema del valor medio Sia $f \in C^1(O)$, O aperto convesso. Allora

$$|f(u) - f(v)| = |\int_0^1 [\frac{d}{dt} f(v + t(u-v))]\, dt| =$$

$$|\int_0^1 < \nabla f(v + t(u-v)), u - v > dt| \leq ||u-v|| \sup_{t\in[0,1]} \|\nabla f(v + t(u-v))\|$$

Corollario Sia $f \in C^1(O)$, O aperto connesso per archi. Allora

$$\nabla f(u) = 0 \ \forall u \in O \ \Rightarrow \ f \equiv \text{cost. in } O$$

Prova. Fissati $u, v \in O$, sia $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in O \ \forall\, t \in [0,1]$, un cammino continuo congiungente u e v in O : $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$. Il teorema del valor medio implica che f é costante sui dischi e quindi, dalla continuitá di γ segue: $\bar{t} := \sup\{t : f(\gamma(s)) = f(u) \ \ \forall s \in [0,t)\} > 0$ ed infatti $\bar{t} = 1$.

Cammini differenziabili $\gamma \in C^1([0,1], \mathbf{R}^2)$ se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $x, y \in C^1([0,1])$. γ si chiama cammino differenziabile, e

$$\dot\gamma(t) = (\dot x(t), \dot y(t)) \quad \text{é il } \textbf{vettore tangente} \text{ in } \gamma(t) \text{ a } \gamma.$$

Esempio. $\gamma(t) = (r\cos 2\pi t, r\sin 2\pi t)$, $t \in [0,1]$, $\dot\gamma(t) = (-2\pi r\sin 2\pi t, 2\pi r\cos 2\pi t)$

Derivazione di funzioni composte Sia $f \in C^1(O)$, $\gamma \in C^1([0,1], O)$ Allora

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) =< \nabla f(\gamma(t), \dot\gamma(t) >$$

É: $\gamma(t+s) = \gamma(t) + \dot\gamma(t)s + h(s)$, $f(u+h) = f(u) + < \nabla f(u), h > + \sigma(h) \Rightarrow$

$$f(\gamma(t+s)) = f(\gamma(t)) + < \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) > s + \circ(s) \quad \text{ove}$$

$\circ(s) :=< \nabla f(\gamma(t)), h(s) > + \sigma(\dot\gamma(t)s + h(s))$. Infatti $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0, s_e > 0$:

$(||k|| \le \delta_\epsilon \Rightarrow \sigma(k) \le \epsilon ||k||)$ e $(|s| \le s_\epsilon \Rightarrow ||h(s)|| \le \epsilon|s|$ e $||\dot\gamma(t)|||s| + ||h(s)|| \le \delta_\epsilon)$

$\Rightarrow |< \nabla f(\gamma(t)), h(s) > + \sigma(\dot\gamma(t)s + h(s))| \le \epsilon\, |s|\, (||\nabla f(\gamma(t))|| + ||\dot\gamma(t)|| + 1)$.

ESRCIZIO 1. Dati $\alpha, \beta > 0$, sia

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha\, |y|^\beta}{x^2 + y^2} \quad \text{se} \quad x^2 + y^2 \ne 0, \quad f(0,0) = 0. \qquad \text{É}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{|x|^\alpha\, |y|^\beta\, [(\alpha - 2)x^2 + \alpha y^2]}{x\,(x^2+y^2)^2}, \qquad \text{se} \quad x^2 + y^2 \ne 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{|x|^\alpha\, |y|^\beta\, [\beta x^2 + (\beta - 2)y^2]}{y\,(x^2+y^2)^2} \qquad \text{se} \quad x^2 + y^2 \ne 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Provare che

(i) f é continua in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 2$
(ii) esiste $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)$ $\forall\, h \in \mathbf{R}^2$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 3$
(iii) f é differenziabile in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 3$
(iv) $f \in C^1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 3$ e $\alpha, \beta \ge 1$.

(i) Se $\alpha + \beta - 2 \le 0$, $f(tx, ty) = t^{\alpha+\beta-2} f(x,y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2 + y^2 \ne 0$) e quindi f non é continua in $(0,0)$.
Sia dunque $\alpha + \beta - 2 > 0$.
Se $\alpha \ge 2$ é $f(x,y) \le |x|^{\alpha-2}\, |y|^\beta \to_{x^2+y^2 \to 0} 0$. Analogamente se $\beta \ge 2$.

Resta da considerare il caso $\alpha,\ \beta\ <\ 2$. In tal caso, $\delta\ :=\ \frac{\alpha+\beta-2}{2}\ \in (0, \frac{1}{2}\min\{\alpha,\beta\})$ e possiamo scrivere

$$f(x,y)\ =\ \frac{|x|^{\alpha-\delta}\ |y|^{\beta-\delta}}{x^2+y^2}\ (|x|^{\delta}\ |y|^{\delta}\ )$$

ove $\delta > 0,\ \ \alpha-\delta\ >\ 0,\ \ \beta-\delta\ >\ 0,\ \ \alpha\ +\ \beta-\ 2\delta\ =\ 2.$ Dalla diseguaglianza

$$\text{(Holder)}\qquad p,q>0,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ =\ 1\quad\Rightarrow\quad |ab|\ \le\ \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}\qquad \forall a,b\in\mathbf{R}\quad (*)$$

segue che, se $0<r,s,\ \ r+s=2$ allora (prendendo $p:=\ \frac{2}{r},\ \ q:=\ \frac{2}{s}$ in $(*)$)

$$|x|^r\ |y|^s\ \le\ \frac{r}{2}\,x^2\ +\ \frac{s}{2}\,y^2\ \le\ x^2\ +\ y^2\qquad \forall x,y\in\mathbf{R}$$

e quindi $|x|^{\alpha-\delta}\ |y|^{\beta-\delta}\ \le\ x^2\ +\ y^2$ e quindi $f(x,y)\ \le\ |x|^{\delta}\ |y|^{\delta}\ \to_{x^2+y^2\to 0} 0.$

(ii) $\alpha+\beta\ <\ 3\ \Rightarrow\ \frac{f(tx,ty)}{t}\ =\ t^{\alpha+\beta-3}f(x,y)\ \to_{x^2+y^2\to 0} +\infty$ (se $x^2+y^2\ne 0$) e $\alpha+\beta\ =\ 3\ \Rightarrow\ \frac{f(tx,ty)}{t}\ \to_{x^2+y^2\to 0}\ f(x,y)$ e quindi, se $\alpha+\beta\ \le\ 3$, f non é derivabile, in $(0,0)$, nelle direzioni $h\ =\ (x,y)\ \ne\ (0,0)$. Invece, $\alpha+\beta\ >\ 3\ \Rightarrow\ \frac{f(tx,ty)}{t}\ \to_{x^2+y^2\to 0} 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)\ =\ 0\ \forall\, h\in\mathbf{R}^2$.

(iii) Da (ii) segue che f non é differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha\ +\ \beta\ \le\ 3.$
Sia $\alpha\ +\ \beta\ >\ 3.$
Siccome $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

$$f \text{ é differenziabile in } (0,0)\quad\Leftrightarrow\quad \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

Siccome

$$\alpha\ \ge\ 3,\quad \alpha\ +\ \beta\ >\ 3\quad\Rightarrow\quad \frac{|x|^{\alpha}\ |y|^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\ \le (x^2\ +\ y^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\ |y|^{\beta}\ \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

basta considerare il caso $\alpha,\ \beta\ \in\ (0,3).$ Posto $\tau\ :=\ \frac{\alpha+\beta-3}{2}$ é allora $\tau\in(0,\frac{1}{2}\min\{\alpha,\beta\}),\ \ \alpha\ +\ \beta\ -2\tau\ =\ 3$ e

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\ =\ \left[\frac{|x|^{\frac{2}{3}\,(\alpha-\tau)}\ |y|^{\frac{2}{3}(\beta-\tau)}}{x^2+y^2}\right]^{\frac{3}{2}}\ |x|^{\tau}\ |y|^{\tau}\ \le\ |x|^{\tau}\ |y|^{\tau}\ \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

di nuovo in virtú di $(*)$.

(iv) Da (iii) segue che f non é C^1 se $\alpha + \beta \leq 3$. Sia $\alpha + \beta > 3$.

Come in (i) $\alpha \geq 1, \quad \alpha + \beta > 3 \quad \Rightarrow \quad |\frac{\partial f}{\partial x}| \leq \alpha \frac{|x|^{\alpha-1}\,|y|^\beta}{x^2+y^2} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0$

mentre, se $\alpha \in (0,1)$ e $\gamma >> 1$ risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t^\gamma, t) = \frac{t^{\beta-2-\gamma(1-\alpha)}\,[(\alpha-2)\,t^{2\gamma-2} + \alpha]}{(t^{2\gamma+2}+1)^2} \rightarrow_{t\to 0^+} +\infty$$

Analogamente, $f_y \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0$ sse $\alpha + \beta > 3$ e $\beta \geq 1$.

ESRCIZIO 2. Dati $\alpha,\ \beta > 0$, sia

$$g(x,y) = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{x^4+y^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad g(0,0) = 0. \qquad \text{É}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta\,[(\alpha-4)x^4 + \alpha y^2]}{x\,(x^4+y^2)^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2\neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta\,[\beta x^4 + (\beta-2)y^2]}{y\,(x^4+y^2)^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2\neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

Provare che

(i) g é continua in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + 2\beta > 4$
(ii) esiste $\frac{\partial g}{\partial h}(0,0)$ $\forall\, h \in \mathbf{R}^2$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 3$
(iii) g é differenziabile in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + 2\beta > 5$ e $\alpha + \beta > 3$
(iv) $g \in C^1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + 2\beta > 6$ e $\alpha,\ \beta \geq 1$.

(i) Se $\alpha + 2\beta < 4$, $g(tx, t^2y) = t^{\alpha+2\beta-4} g(x,y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2+y^2\neq 0$) e quindi g non é continua in $(0,0)$.
Sia dunque $\alpha + 2\beta > 4$.
Se $f(x,y) := \frac{|x|^{\frac{\alpha}{2}}\,|y|^\beta}{x^2+y^2}$ é $g(x,y) = f(x^2,y) \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0$ perché $\frac{\alpha}{2} + \beta > 2$ (vedi l'esercizio 1) e quindi g é continua.

(ii) $\alpha+\beta < 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{g(tx,ty)}{t} = t^{\alpha+\beta-3}\,\frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{t^2x^4+y^2} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} +\infty$ e
$\alpha+\beta = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{g(tx,ty)}{t} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{y^2}$ (se $x^2+y^2\neq 0$) e quindi,
$\alpha+\beta \leq 3 \quad \Rightarrow \quad f$ non é derivabile, in $(0,0)$, nelle direzioni $h = (x,y) \neq (0,0)$.
$\alpha+\beta > 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(tx,ty)}{t} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = 0 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^2$.

(iii) Siccome $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$

$$g \text{ é differenziabile in } \quad (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0$$

Siccome $\alpha + 2\beta \leq 5 \;\Rightarrow\; \frac{g(t,t^2)}{\sqrt{t^2+t^4}} = t^{\alpha+2\beta-5} \frac{1}{2\,(1+t^2)}$ non tende a zero al tendere di t a zero, g non é differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha + 2\beta \leq 5$. Inoltre da (ii) segue che g non é differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha + \beta \leq 3$.

Sia dunque $\alpha + \beta > 3$ e $\alpha + 2\beta > 5$. Da (i) e $(*)$ segue:

$$\alpha \geq 1,\ \alpha+2\beta > 5 \;\Rightarrow\; \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{|x|^{\alpha-1}\,|y|^{\beta}}{x^4+y^2} \leq \frac{|x|^{\alpha-1}\,|y|^{\beta}}{x^4+y^2} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0$$

$$\alpha < 1,\ \alpha+\beta > 3 \;\Rightarrow\; \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|y|^{\beta+\alpha-1}}{x^4+y^2}\left[\frac{|x|^{2\alpha}\,|y|^{2-2\alpha}}{x^2+y^2}\right]^{\frac{1}{2}} \leq |y|^{\alpha+\beta-3} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0$$

(iv) Se $\alpha < 1$ e $\gamma >> 1$ risulta

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t^\gamma, t) = \frac{t^{\beta-2-\gamma(1-\alpha)}\ [(\alpha-4)\,t^{4\gamma-2} + \alpha)}{(t^{4\gamma-2}+1)^2} \rightarrow_{t\to 0^+} +\infty$$

Se $\beta < 1$ e $\gamma >> 1$ risulta

$$\frac{\partial g}{\partial y}(t, t^\gamma) = \frac{t^{\alpha-4-\gamma(1-\beta)}\,[\beta + (\beta-2)t^{2\gamma-4}]}{(1+t^{2\gamma-4})^2} \rightarrow_{t\to 0^+} +\infty$$

Da (iii) segue che f non é C^1 se $\alpha + \beta \leq 3$. Inoltre, $\frac{\partial g}{\partial y}(t,t^2) = \frac{\beta-1}{2}\ t^{\alpha+2\beta-6}$ non tende a zero al tendere di t a zero se $\alpha + 2\beta \leq 6$ e quindi neanche in tal caso f ha derivate parziali continue in $(0,0)$.

Siano quindi $\alpha, \beta \geq 1$, $\alpha + 2\beta > 6$. Da (i) segue

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \leq \frac{|x|^{\alpha-1}\,|y|^{\beta}}{x^4+y^2}\ \frac{(\alpha-4)x^4 + \alpha y^2}{x^4+y^2} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \leq \beta\,\frac{|y|^{\beta-1}\,|x|^{\alpha}}{x^4+y^2} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0$$

APPENDICE: Prova di $(*)$

Per ogni $y \geq 0$ la funzione $x \to xy - \frac{x^p}{p}$, $x \geq 0$ é superiormente limitata e raggiunge il suo massimo in $x(y)$ tale che $y - x^{p-1} = 0$ ovvero $x(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ e tale massimo vale $y\,y^{\frac{1}{p-1}} - \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} = \frac{1}{q}\,y^{\frac{p}{p-1}} = \frac{y^{\frac{1}{q}}}{q}$. Dunque

$$xy - \frac{x^p}{p} \leq \frac{y^{\frac{1}{q}}}{q} \quad \forall x, y \geq 0$$