AM2: Lavoro individuale 2

Successioni di funzioni

Studiare il comportamento (convergenza semplice, uniforme) delle seguenti successioni di funzioni

1. $f_n(x) = \dfrac{n^2}{1+n^2x^2}$ 2. $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}\log x^n}{1+nx}$ 3. $f_n(x) = e^{-\frac{n^2}{1+n^2x^2}}$

4. $f_n(x) = e^{\frac{n^2}{1+n^2x^2}}$ 5. $f_n(x) = e^{\frac{n^2\arctan x}{1+n^2x^2}}$ 6. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx^2)}{1+xn^2}$

7. $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{1+nx^2}$ 8. $f_n(x) = \dfrac{1}{x+\arctan\frac{1}{nx}}$ 9. $f_n(x) = e^{\frac{\sqrt{x}\log x^n}{1+nx}}$

10. $f_n(x) = \dfrac{x}{x+\arctan\frac{1}{nx}}$ se $x \neq 0$, $f_n(0) = 0$

Soluzioni

1. $f_n(x) \to_{n\to+\infty} \frac{1}{x^2}$ $\forall\, x \neq 0$. Inoltre

$$|x| \ge \delta > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x^2} - f_n(x) = \frac{1}{x^2(1+n^2x^2)} \le \frac{1}{\delta^2(1+n^2\delta^2)} \to_{n\to+\infty} 0$$

e quindi la convergenza é uniforme in $|x| \ge \delta$.

La convergenza non é peró uniforme in $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ perché $\frac{1}{x^2} - f_n(x)$ calcolata in $x = \frac{1}{n}$ vale $\frac{n^2}{2}$ (o piú semplicemente perché la funzione limite non é limitata in $\mathbf{R}\setminus\{0\}$).

2. $f_n(x) \to_{n\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ $\forall x > 0$. Inoltre

$$|x| \ge \delta > 0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{\log x}{\sqrt{x}} - f_n(x)\right| = \left|\frac{\log x}{\sqrt{x}(1+nx)}\right| \le \sup_{|x|\ge\delta}\left|\frac{\log x}{\sqrt{x}}\;\frac{1}{1+n\delta}\right| \to_{n\to+\infty} 0$$

e quindi la convergenza é uniforme in $|x| \ge 0$.

Tuttavia, tale differenza, calcolata in $x = \frac{1}{n}$ vale $\frac{\sqrt{n}\,\log n}{2}$ e quindi la convergenza non é uniforme in $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

3. $f_n(x) \to_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$, $\quad f_n(0) \to_{n\to+\infty} 0$.

La convergenza é uniforme su tutto $\mathbf{R}$: su $|x| \geq \delta$ segue da 1. mentre

$$|x| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{n^2}{1+n^2x^2}} + e^{-\frac{1}{x^2}} \leq 2e^{-\frac{1}{2\delta^2}} \leq \epsilon \qquad \text{se} \quad n \geq \frac{1}{\delta}, \ \ \delta \leq \delta_\epsilon$$

4. $f_n(x) \to_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2}}$ $\forall\, x \neq 0$. Come in 1. la convergenza é uniforme in $|x| \geq \delta$. mentre la convergenza non é uniforme in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

5. $f_n(x) \to_{n\to+\infty} f(x) := e^{\frac{\arctan x}{x^2}}$ $\forall\, x \neq 0$ ma $|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| \to_{n\to+\infty} +\infty$ e quindi la convergenza non é uniforme (anche: la funzione limite non é limitata!). La convergenza é uniforme in $|x| \geq \delta > 0$ perché

$$|x| \geq \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n^2 \arctan x}{1+n^2x^2} - \frac{\arctan x}{x^2}\right| \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\delta^2(1+n^2\delta^2)} \to_{n\to+\infty} 0$$

6. $f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0$ $\forall\, x \geq 0$ e la convergenza é uniforme:

$$\left|\frac{\sin(nx^2)}{1+xn^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2} \quad \text{se} \quad x \geq 1 \quad \text{e} \quad \left|\frac{\sin(nx^2)}{1+xn^2}\right| \leq \frac{nx^2}{1+xn^2} \leq \frac{1}{n} \quad \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1$$

7. $f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0$ $\quad \forall\, x \geq 0$

ma la convergenza non é uniforme:

$$f_n(\frac{1}{n^2}) \to_{n\to+\infty} \sin 1$$

Poi, $|x| \geq \delta > 0 \ \Rightarrow \ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n\delta^2} \to_{n\to+\infty} 0$ e quindi la convergenza é uniforme in $|x| \geq 0$.

8. $f_n(x) \to_{n\to+\infty} \frac{1}{x}$ $\quad \forall\, x \neq 0$

ma la convergenza non é uniforme, perché la funzione limite non é limitata.

Poi,

$$|x| \geq \delta > 0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi}{2n\delta^2} \to_{n\to+\infty} 0$$

e quindi la convergenza é uniforme in $|x| \geq 0$.

9. Come in 2.

10. $f_n(x) \to_{n\to+\infty} 1$ $\forall\, x \neq 0$, $\quad f_n(0) \to_{n\to+\infty} 0$ e quindi la convergenza non é uniforme perché la funzione limite é discontinua in $x = 0$. Poi,

$$|x| \geq \delta > 0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi}{2\delta} \to_{n\to+\infty} 0$$

e quindi la convergenza é uniforme in $|x| \geq 0$.