AM2: Lavoro individuale 1

Integrali generalizzati I

Studiare il comportamento dei seguenti integrali impropri, al variare dei parametri a, b:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - a\sin x}{x^3} dx$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^a} dx$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^a} dx$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a + x^b}\, dx \qquad a, b > 0$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt{1+x^2} - ax)^2\, dx$

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\int_0^{ax} e^{-t^2} dt) dx$

8. $\displaystyle\int_0^{1} (\int_0^{\frac{1}{x}} e^{at^2} dt) dx$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}}{\log(1+|x|^a)} dx,$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|^a} dx$

Integrali generalizzati II

Stabilire se i seguenti integrali sono convergenti ed eventalmente calcolarli.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin x dx$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2x dx$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin 2x dx$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3x} \sin x dx$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-10x} \sin x dx$

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx$

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x dx$

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-10x} \cos x dx$

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4x} \cos 3x dx$

11. $\displaystyle\int_0^{1} (\log x) \arctan x dx$

12. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (\log x^2) \arctan x dx$

13. $\displaystyle\int_{-1}^{2} (\log x^2) \arctan \frac{1}{x} dx$ 14. $\displaystyle\int_{-2}^{1} (\log x^2) \arctan \frac{1}{x} dx$

15. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} (\log x) \arctan \frac{1}{x} dx$ 16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{1}{x^2} dx$

17. $\displaystyle\int_{-2}^{1} e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{1}{x} dx$ 18. $\displaystyle\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{1}{x} dx$

19. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{1}{x} dx$ 20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{1}{x} dx$

Soluzioni

Integrali generalizzati I

1. Converge sse $a = 1$: l'integrando é inf.mo di ordine 2 a $+\infty$ per ogni a, mentre é infinito in $x = 0$ di ordine 2 se $a \neq 1$

2. Converge sse $1 < a < 3$: l'integrando é inf.mo di ordine a a $+\infty$, mentre é infinito in $x = 0$ di ordine $a - 2$

3. Converge sse $2 < a < 4$: l'integrando é inf.mo di ordine $a - 1$ a $+\infty$, mentre é infinito in $x = 0$ di ordine $a - 3$

4. Converge sse $a < 1$ e $a + b > 1$: l'integrando é inf.mo di ordine $a + b$ a $+\infty$, mentre é infinito in $x = 0$ di ordine a

5. Converge sse $\min\{a, b\} < 1 < \max\{a, b\}$: l'integrando é inf.mo di ordine $\max\{a, b\}a$ a $+\infty$, mentre é infinito in $x = 0$ di ordine $\min\{a, b\}$

6. Converge sse $1 = a$: l'integrando é inf.mo a $+\infty$ sse $a = 1$ ed in tal caso é di ordine 2.

7. Converge sse $a = 0$: l'integrando non é inf.mo a $+\infty$ se $a \neq 0$

8. Converge sse $a < 0$: se $a \geq 0$ l'integrando é infinito in $x = 0$ almeno come $\frac{1}{x}$

9. Converge sse $0 < a < 1$: l'integrando é inf.mo a $+\infty$, e in tal caso di tipo esponenziale, sse $a > 0$, mentre é infinito in $x = 0$ di ordine a se $a > 0$

10. Converge sse $1 < a$: l'integrando é inf.mo di ordine a a piú e meno infinito, ed é comunque un infinitesimo in $x = 0$.

Integrali generalizzati II

1-10. Dopo due integrazioni per parti si trova che

$$\forall \ a > 0 \ : \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx \ = \ \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \ = \ \frac{a}{a^2 + b^2}$$

11-14. Gli integrali convergono (sono infatti integrali ordinari!). In 12 l'integrale vale zero per disparitá, in 13-14 gli integrali convergono e hanno, di nuovo per disparitá, valori opposti.

15. L'integrale diverge, perché $(\log x) \arctan \frac{1}{x} \ \geq \ \frac{1}{x}$ per x grande.

16. L'integrale é convergente, perché l'integrando é infinitesimo di ordine 2 a pú e meno infinito.

17-18. Gli integrali divergono perché gli integrandi hanno una singolaritá esponenziale in $x = 0$.

19-20. Gli integrali divergono perché gli integrandi sono infinitesimi di ordine 1 a piú (e meno) infinito.