AM2 - Tutorato V

Continuità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$

Venerdì 3 Dicembre 2004

Esercizio 1. Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{|(x,y)|^\beta} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Trovare condizioni necessarie e sufficienti su α e β affinché:
(i) f sia continua nell'origine;
(ii) f abbia le derivate direzionali nell'origine;
(iii) f sia differenziabile nell'origine.

Esercizio 2. Discutere la continuità della seguente funzione su $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} ye^{-\left(\frac{y}{x-1}\right)^2} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Considerare la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 \sin \frac{1}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Dopo aver verificato che f é continua, calcolarne (se esistono) le derivate parziali e discuterne la differenziabilità nell'origine. Osservare infine che f_x ed f_y non sono continue nell'origine. Non é ciò in contrasto con il Teorema del Differenziale Totale?

Esercizio 4. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - y^3x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcolare $\frac{d}{dy} f_x(0,0)$ e $\frac{d}{dx} f_y(0,0)$. Perché sono diverse?

Esercizio 5. Trovare se esiste una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\lim_{t \to 0} f(at^\alpha, bt^\beta) = 0 \qquad \forall\ \alpha, \beta > 0\ \ a, b\ \in \mathbb{R}$$

ed f non sia continua nell'origine. Trovare inoltre $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che ammetta tutte le derivate direzionali continue in un punto ma non sia ivi differenziabile.