Esercitazione n°2

1 Integrali impropri

Esercizio 1: Calcolare $\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$.

Sol.: Dalla definizione di integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_0^\omega \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

Allora

$$\int_0^\omega \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int_0^\omega \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_1^{e^\omega} \frac{1}{t^2+1}\,dt|_{t=e^x} = [\arctan t]_1^{e^\omega} = \arctan(e^\omega) - \arctan 1$$

Dunque

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}(\arctan(e^\omega)-\arctan 1) = \frac{\pi}{2}-\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 2: Calcolare $\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^2}\,dx$.

Sol.: Spezziamo l'integrale in due parti:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\log x}{(1+x)^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{(1+x)^2}\,dx$$

Integriamo separatamente i due termini. Si ha

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \frac{\log x}{(1+x)^2}\,dx &= \left[-\frac{\log x}{x+1}\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{(x+1)x}\,dx = \frac{\log\varepsilon}{\varepsilon+1} + [\log x - \log(x+1)]_\varepsilon^1 \\ &= \frac{\log\varepsilon}{\varepsilon+1} - \log 2 - \log\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} = -\log 2 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\log\varepsilon - \log(\varepsilon+1)\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^1 \frac{\log x}{(1+x)^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\log 2 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\log\varepsilon - \log(\varepsilon+1)\right) = -\log 2$$

Analogamente

$$\int_1^\omega \frac{\log x}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{\log\omega}{\omega+1} + \log 2 + \log\frac{\omega}{\omega+1}$$

da cui
$$\int_1^\infty \frac{\log x}{(1+x)^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{\log\omega}{\omega+1}+\log 2+\log\frac{\omega}{\omega+1}\right)=\log 2$$
Ne segue che l'integrale converge e che
$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx = -\log 2+\log 2 = 0$$

Esercizio 3: Studiare la convergenza di $\int_0^1 x^\alpha \log^n x\,dx$ al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ ed eventualmente calcolarne il valore.

Sol.: Si ha convergenza se e solo se $\alpha>-1$. Infatti integrando per parti si ha
$$\int_\varepsilon^1 x^\alpha\log^n x\,dx = \int_\varepsilon^1 x^{\alpha+1}\frac{\log^n x}{x}\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}\log^{n+1}x}{n+1}\right]_\varepsilon^1 - \frac{\alpha+1}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^\alpha\log^{n+1}x\,dx$$
Ora
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{\alpha+1}\log^{n+1}\varepsilon}{n+1}$$
vale 0 se $\alpha+1>0$, mentre per $\alpha\le -1$ vale $+\infty$ o $-\infty$ a seconda della parità di n. Dunque per $\alpha\le-1$ non si può avere convergenza.

Per $\alpha>-1$ mostriamo la convergenza e calcoliamo per induzione su $n\in\mathbb{N}$ il valore dell'integrale
$$I_n := \int_0^1 x^\alpha\log^n x\,dx$$
Si ha
$$I_1 = \left[\frac{x^{\alpha+1}\log x}{\alpha+1}\right]_0^1 - \int_0^1\frac{x^\alpha}{\alpha+1}\,dx = -\left[\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$
Inoltre
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^\alpha\log^n x\,dx = \int_0^1 x^{\alpha+1}\frac{\log^n x}{x}\,dx = \\ &= \left[\frac{x^{\alpha+1}\log^{n+1}x}{n+1}\right]_0^1 - \frac{\alpha+1}{n+1}\int_0^1 x^\alpha\log^{n+1}x\,dx = -\frac{\alpha+1}{n+1}I_{n+1}\end{aligned}$$
Per ricorrenza si ottiene quindi che I_{n+1} converge se e solo se I_n converge (dunque in particolare se I_1 converge) e che
$$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(\alpha+1)^{n+2}}$$

Esercizio 4: Studiare la convergenza di $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{|x|}}{x^2-2x}\,dx$ ed eventualmente calcolare il valore.

Sol.: Spezziamo in due parti l'integrale:
$$\int_{-1}^1\frac{\sqrt{|x|}}{x^2-2x}\,dx = \int_{-1}^0\frac{\sqrt{|x|}}{x^2-2x}\,dx + \int_0^1\frac{\sqrt{|x|}}{x^2-2x}\,dx = \int_{-1}^0\frac{\sqrt{-x}}{x^2-2x}\,dx + \int_0^1\frac{\sqrt{x}}{x^2-2x}\,dx$$

Per il primo termine poniamo $t = \sqrt{-x}$. Allora $-x = t^2$ da cui $dx = -2tdt$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{-x}}{x^2-2x}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{\sqrt{-x}}{x^2-2x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{1}^{\sqrt{-\varepsilon}} \frac{t}{t^4+2t^2}(-2t)dt = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{\sqrt{-\varepsilon}}^{1} \frac{2}{t^2+2}dt = \lim_{\varepsilon\to 0^-}\sqrt{2}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}}\right)\right] = \\ &= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Per il secondo termine poniamo invece $t = \sqrt{x}$. Si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{x^2-2x}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\sqrt{x}}{x^2-2x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1} \frac{t}{t^4-2t^2}(2t)dt = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1} \frac{2}{t^2-2}dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1}\left(-\frac{1}{t+\sqrt{2}} + \frac{1}{t-\sqrt{2}}\right)dx = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t}\right]_{\sqrt{\varepsilon}}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}\log(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

L'integrale studiato quindi converge ed il suo valore è

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{|x|}}{x^2-2x}\,dx = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\log(\sqrt{2}-1)$$

Esercizio 5: Studiare la convergenza di $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx$.

Sol.: Dobbiamo studiare l'integrabilità della funzione all'infinito. Poiché

$$\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

ponendo $y = \frac{1}{x}$ si ha che

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

è infinitesimo dello stesso ordine di $\frac{1}{x}$. Pertanto

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

è infinitesima di ordine pari a quello di $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ ed è quindi integrabile.

Esercizio 6: Studiare la convergenza di $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx$.

Sol.: Mostriamo che l'integrale converge assolutamente, quindi converge.

$$\left|\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx\right| \le \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^2+1}\,dx \le \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 7: Studiare la convergenza di $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x \, dx$.

Sol.: Dobbiamo studiare separatamente l'integrabilità della funzione in $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$. Spezziamo dunque l'integrale in due parti:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x \, dx = \int_{-\pi/2}^{0} \tan x \, dx + \int_{0}^{\pi/2} \tan x \, dx$$

Si ha

$$\int_{0}^{\omega} \tan x \, dx = \int_{0}^{\omega} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -[\log(\cos x)]_0^{\omega} = -\log(\cos \omega)$$

Poiché

$$\lim_{\omega \to \frac{\pi}{2}} -\log(\cos \omega) = +\infty$$

ed inoltre $\tan(-x) = -\tan x$ l'integrale non esiste, dato che si avrebbe

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x \, dx = \int_{-\pi/2}^{0} \tan x \, dx + \int_{0}^{\pi/2} \tan x \, dx = -\infty + \infty$$

Esercizio 8: Studiare la convergenza di $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+|x|^\alpha} \, dx$.

Sol.: Osserviamo che ponendo $f(x) = \frac{x^2}{1+|x|^\alpha}$ si ha $f(-x) = f(x)$, dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+|x|^\alpha} \, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+|x|^\alpha} \, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{1+|x|^\alpha} \, dx = 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^\alpha} \, dx$$

Poiché $f(x)$ per $x \to \infty$ è infinitesima di ordine $\alpha - 2$ l'integrale converge se $\alpha - 2 > 1$ ossia $\alpha > 3$.

Esercizio 9: Stabilire la covergenza di $\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} \, dx$ per $\alpha \geq 0$.

Sol.: Essendo $\alpha \geq 0$ vicino al punto $x = 0$ non abbiamo problemi di integrabilità, dunque dobbiamo soltanto verificare se la funzione è integrabile per $x \to \infty$. Confrontiamo la funzione integranda con l'infinitesimo campione $\frac{1}{x}$. La funzione e^x per $x \to \infty$ va all'infinito più velocemente di qualunque potenza di x. Dunque

$$x^\alpha e^{-x} = \frac{x^\alpha}{e^x} \leq \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$$

per ogni $\beta \geq 0$. E' sufficiente quindi scegliere β tale che $\beta - \alpha > 1$ per avere l'integrabilità per $x \to \infty$. Pertanto

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} \, dx$$

è convergente.

Esercizio 10: Studiare la convergenza di $\int_0^\infty \sin(x^\alpha) \, dx$ $(\alpha > 1)$.

Sol.: Osserviamo anzitutto che, essendo la funzione integrabile in 0, basta studiare la convergenza di

$$\int_{(\pi/2)^{1/\alpha}}^{\infty} \sin(x^\alpha)\, dx$$

Applichiamo la sostituzione $t = x^\alpha$. Allora $dt = \alpha x^{\alpha-1} dx$, da cui

$$\int_{(\pi/2)^{1/\alpha}}^{\infty} \sin(x^\alpha)\, dx = \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin t}{\alpha t^{1-1/\alpha}}\, dt$$

Con un'integrazione per parti troviamo

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\omega} \frac{\sin t}{\alpha t^{1-1/\alpha}}\, dt &= -\left[\frac{\cos t}{\alpha t^{1-1/\alpha}}\right]_{\pi/2}^{\omega} - \int_{\pi/2}^{\omega} \frac{(1-1/\alpha)\cos t}{\alpha\ t^{2-1/\alpha}}\, dt = \\ &= -\frac{\cos\omega}{\alpha\omega^{1-1/\alpha}} - \int_{\pi/2}^{\omega} \frac{(1-1/\alpha)\cos t}{\alpha t^{2-1/\alpha}}\, dt\end{aligned}$$

Ora, per $\alpha > 1$ si ha

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{\cos\omega}{\alpha\omega^{1-1/\alpha}} = 0$$

D'altra parte si ha anche

$$\frac{|\cos t|}{t^{2-1/\alpha}} \le \frac{1}{t^{2-1/\alpha}}$$

la quale è integrabile poiché $2 - 1/\alpha < 1$.

2 Altri esercizi svolti

Esercizio 11: Studiare la convergenza di $\int_0^\infty \sin^2 x\, dx$.

Sol.: Abbiamo

$$\int_0^\omega \sin^2 x\, dx = [-\sin x\cos x]_0^\omega + \int_0^\omega \cos^2 x\, dx = \omega - \sin\omega\cos\omega - \int_0^\omega \sin^2 x\, dx$$

da cui

$$\int_0^\omega \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}(\omega - \sin\omega\cos\omega)$$

Quindi

$$\int_0^\infty \sin^2 x\, dx = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2}(\omega - \sin\omega\cos\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2}(\omega - \frac{1}{2}\sin 2\omega) = +\infty$$

e l'integrale cercato non converge.

Esercizio 12: Studiare la convergenza di $\int_e^\infty \frac{1}{x\log x}\, dx$.

Sol.: Verifichiamo direttamente che l'integrale non converge. Consideriamo dunque

$$\int_e^\omega \frac{1}{x\log x}\, dx = [\log(\log x)]_e^\omega = \log(\log\omega) \to \infty$$

per $\omega \to \infty$. Notiamo inoltre che la funzione integranda è infinitesima di ordine superiore ad $\frac{1}{x}$, poiché

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\log x}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} = 0$$

ma non esiste alcuna potenza α (maggiore di 1) di $\frac{1}{x}$ per cui si possa dire che la funzione è infintesima di ordine α dal momento che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\log x}}{1/x^{\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\log x} = \infty$$

per ogni $\alpha \geq 1$.