Esercitazione n°1

1 Integrazione di funzioni razionali

Consideriamo il rapporto $\frac{P(x)}{Q(x)}$ di due polinomi di gradi n e m rispettivamente. Per determinare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ possiamo procedere nel modo seguente.

- *I passo:* Se $n \geq m$ dividiamo il polinomio $P(x)$ per il denominatore $Q(x)$ ottenendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

  dove $R(x)$ è un polinomio di grado strettamente minore di m. Ci siamo quindi ricondotti a studiare il caso in cui il grado del numeratore sia strettamente minore di quello del denominatore. Possiamo supporre d'ora in poi che si abbia $n < m$.

- *II passo:* decomponiamo in fattori irriducibili di primo e secondo grado il polinomio $Q(x)$. Si ha

$$Q(x) = c(x-a)^{\alpha} \cdots (x-b)^{\beta} \cdots (x^2+px+q)^{\mu} \cdots (x^2+lx+s)^{\nu}$$

  dove $a, \dots, b$ sono numeri reali distinti ed i polinomi $x^2+px+q, \dots, x^2+lx+s$ hanno radici complesse coniugate non reali.

- *III passo:* riscriviamo la frazione $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (come somma di frazioni più semplici) nella forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{c}\left[\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \cdots + \frac{B_1}{x-b} + \cdots + \frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{K_1 x + L_1}{x^2+px+q} + \cdots + \frac{K_{\mu} x + L_{\mu}}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+lx+s} + \cdots + \frac{M_{\nu} x + N_{\nu}}{(x^2+lx+s)^{\nu}}\right]$$

  Le incognite $A_i, B_i, K_i, L_i, M_i, N_i$ si determinano facendo il comune denominatore e confrontando i coefficienti del numeratore ottenuto con quelli di $P(x)$.

  A questo punto per trovare la primitiva cercata basta conoscere le primitive delle funzioni

$$\frac{1}{x-a}, \frac{1}{(x-a)^h}, \frac{Kx+L}{x^2+px+q}, \frac{Kx+L}{(x^2+px+q)^h} \quad \forall h \geq 2.$$

Esercizio 1: Calcolare la primitiva della funzione $\frac{x^2+2x+3}{x^2-1}$.

Sol.: Dividiamo il numeratore per il denominatore ed otteniamo

$$\frac{x^2+2x+3}{x^2-1} = 1 + \frac{2x+4}{x^2-1}$$

Il polinomio x^2-1 si decompone nel prodotto $(x+1)(x-1)$. Dobbiamo quindi scrivere

$$\frac{2x+4}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Facendo il denominatore comune si ha

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1} = \frac{(A+B)x+B-A}{x^2-1}$$

da cui confrontando i coefficienti come nel passo III si ricava $A=-1, B=3$. Dunque

$$\int \frac{x^2+2x+3}{x^2-1}\,dx = \int \left(1+\frac{2x+4}{x^2-1}\right)dx = \int \left(1+\frac{-1}{x+1}+\frac{3}{x-1}\right)dx$$
$$= x - \log|x+1| + 3\log|x-1| + C$$

Esercizio 2: Calcolare la primitiva della funzione $\frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x-1)^2}$.

Sol.: Dobbiamo decomporre la frazione in una somma del tipo

$$\frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Facendo il denominatore comune si ricava

$$\frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Dx+E)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} =$$
$$= \frac{(A+D)x^3+(-A+B-2D+E)x^2+(A+D-2E)x-A+B+E}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} A+D=0 \\ -A+B-2D+E=1 \\ A+D-2E=2 \\ -A+B+E=3 \end{cases}$$

ed i valori $A=-1, B=3, D=1, E=-1$.

Possiamo quindi procedere con il calcolo della primitiva

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx =$$
$$= -\log|x-1| - 3\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan x + C$$

Esercizio 3: Calcolare la primitiva della funzione $\frac{3x^3-9x^2+9x+1}{x^2-3x+2}$.

Sol.: Osserviamo come prima cosa che il polinomio al numeratore $3x^3 - 9x^2 + 9x + 1$ ha grado maggiore di quello al denominatore, quindi procediamo con la divisione:

$$\frac{3x^3 - 9x^2 + 9x + 1}{x^2 - 3x + 2} = 3x + \frac{3x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

Inoltre il denominatore si decompone nel prodotto $(x - 1)(x - 2)$. Cerchiamo A e B tali che

$$\frac{3x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$$

Dunque

$$\frac{3x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x - 1)}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(A + B)x - 2A - B}{x^2 - 3x + 2}$$

da cui $A = -4, B = 7$. Si ottiene pertanto

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^3 - 9x^2 + 9x + 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx &= \int \left(3x + \frac{-4}{x - 1} + \frac{7}{x - 2}\right) dx = \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 4\log|x - 1| + 7\log|x - 2| + C\end{aligned}$$

2 Integrazione per sostituzione: casi particolari

Analizziamo ora alcuni tipi particolari di sostituzioni che permettono di ricondurre il calcolo di alcuni integrali all'integrazione di funzioni razionali.

- **Funzioni razionali in $\sin x$, $\cos x$:** Per quanto riguarda questo tipo di integrali la sostituzione da effettuare è la seguente:

  $$x = 2\arctan t$$

  In tal modo $t = \tan\frac{x}{2}$ e $dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$. Dalla trigonometria ricaviamo l'espressione del seno e del coseno in funzione di t:

  $$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

  $$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = (1 - \tan^2\frac{x}{2})\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

  Si ricava quindi

  $$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)\frac{2}{1 + t^2}\,dt$$

  che a questo punto si è ridotto all'integrale di una funzione razionale di t.

- **Integrali di differenziali binomi:** Sono integrali di funzioni del tipo $x^m(a+bx^n)^p$ con a, b numeri reali non nulli e m, n, p numeri razionali tali che sia intero almeno uno tra p e $\frac{m+1}{n}$. La sostituzione che riconduce la funzione integranda ad una funzione razionale è nei due casi rispettivamente:
  - $x = t^k$ con k minimo comune multiplo dei denominatori di m e n. In questo caso la funzione diventa una funzione razionale nella variabile t ed il suo integrale è dunque facile da calcolare.
  - $a + bx^n = t^{p_2}$ dove p_2 è il denominatore di p. Con questa sostituzione la funzione da integrare si riconduce ad una funzione razionale, poiché si ha

    $$dx = \frac{p_2 t^{p_2-1}}{nb^{1/n}(t^{p_2-1}-a)}\,dt$$

    e dunque l'integrale diventa

    $$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \int \frac{p_2}{nb^{1/n}} t^{p_1+p_2-1}(t^{p_2}-a)^{\frac{m+1}{n}-1}\,dt$$

Esercizio 4: Calcolare $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$.

Sol.: Tramite la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$ si ottiene

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C =_{|_{t=\tan\frac{x}{2}}} \log|\tan\frac{x}{2}| + C$$

Esercizio 5: Calcolare $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$.

Sol.: Tramite la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$ si ottiene

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt = \int \left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\,dt =$$
$$= \log|1+t| - \log|1-t| + C =_{|_{t=\tan\frac{x}{2}}} \log|1+\tan\frac{x}{2}| - \log|1-\tan\frac{x}{2}| + C$$

Esercizio 6: Calcolare $\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3\,dx$.

Sol.: Poniamo $x = t^2$. Allora si ha $dx = 2tdt$ e

$$\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3\,dx = \int \sqrt{t^2}(1+\sqrt{t^2})^3 2t\,dt = \int t(1+t)^3 2t\,dt =$$
$$= \int \left(2t^2+6t^3+6t^4+2t^5\right)\,dt = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{t^6}{3} + C =_{|_{x=t^2}}$$
$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{3} + C$$

Esercizio 7: Calcolare $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Sol.: Poniamo $1+\sqrt[4]{x}=t^3$. Allora si ha $\frac{1}{4}x^{-3/4}dx = 3t^2dt$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{t}{(t^3-1)^2} 12t^2(t^3-1)^3\,dt = \int 12t^3(t^3-1)\,dt = \\ &= \int \left(12t^6-12t^3\right)\,dt = \frac{12}{7}t^7-3t^4+C =|_{1+\sqrt[4]{x}=t^3} \\ &= \frac{12}{7}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^7 - 3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4 + C\end{aligned}$$

3 Altri esercizi svolti

Esercizio 8: Calcolare la primitiva della funzione $\frac{x^3+3x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

Sol.: Osserviamo anzitutto che il grado del numeratore è strettamente minore di quello del denominatore. Il polinomio x^2+1 non ha radici reali. Decomponiamo quindi la frazione:

$$\frac{x^3+3x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Facendo il denominatore comune si ottiene

$$\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)+Dx+E}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+(A+D)x+B+E}{(x^2+1)^2}$$

da cui si ricavano i valori $A=1, B=3, D=-1, E=-2$.

Possiamo dunque calcolare la primitiva

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^3+3x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x+3}{x^2+1}\,dx + \int \frac{-x-2}{(x^2+1)^2}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + 3\arctan x + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + 3\arctan x + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - 2\left(\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x\right) + C = \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + 2\arctan x + \frac{1}{2}\,\frac{1-2x}{x^2+1} + C\end{aligned}$$

Esercizio 9: Calcolare $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$.

Sol.: Tramite la sostituzione $t=\tan\frac{x}{2}$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{2t+1-t^2}\,dt = \\ &= \int \frac{-2}{(t+1+\sqrt{2})(t+1-\sqrt{2})}\,dt\end{aligned}$$

Con qualche calcolo si vede che se

$$\frac{2}{2t+1-t^2} = \frac{A}{t+1+\sqrt{2}} + \frac{B}{t+1-\sqrt{2}}$$

allora $A = 1/\sqrt{2}, B = -1/\sqrt{2}$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{2t+1-t^2} &= \int \frac{1/\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\,dt + \int \frac{-1/\sqrt{2}}{t+1-\sqrt{2}}\,dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log|t+1+\sqrt{2}| - \log|t+1-\sqrt{2}|\right) + C =|_{t=\tan\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log|\tan\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}| - \log|\tan\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}|\right) + C
\end{aligned}$$