AM2: Tracce delle lezioni- XII Settimana

Funzioni Implicite e Moltiplicatori di Lagrange: esempi

1 Sia $g(x,y) = 4y^2 - x^4(1+4y) + 2x^6$, $f(x,y) = y + x^2$ $\Gamma = g^{-1}(0)$. Calcolare

$$m := \inf_{\Gamma} f$$

Siccome $4y^2 + 2x^6 = x^4(1+4y) \Rightarrow y \geq -\frac{1}{4}$, é $y + x^2 \geq x^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ $\forall\ (x,y) \in \Gamma$ e quindi m é finito ed é infatti un minimo.

Notiamo che i punti critici di g, soluzioni di

$$g_x := 12x^5 - 4x^3(1+4y) = 0, \qquad g_y := 8y - 4x^4 = 0$$

sono $(0,0)$, $(1,\frac{1}{2})$, $(-1,-\frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{8})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{8})$ e che, tra questi, i primi tre sono punti singolari di Γ e si ha

$$f(0,0) = 0, \qquad f(1,\frac{1}{2}) = f(-1,\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

Cerchiamo il punto di minimo tra le soluzioni di $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 0$. Vedremo tuttavia che che tale sistema non ha soluzione. Intanto, siccome

$$\nabla f(x,y) = (2x, 1)$$

non si annulla mai deve essere $\lambda \neq 0$, $\nabla g \neq 0$.

Ora, $(0,y)$ é soluzione di $f_x = \lambda g_x$, ma $g(0,y) = 0 \Rightarrow y = 0$, e $(0,0)$ non é soluzione di $\nabla f = \lambda \nabla g$ perché $\nabla g(0,0) = 0$.

Sia quindi $x \neq 0$ e quindi $6x^4 - 2x^2(1+4y) = \lambda = 8y - 4x^4$ e quindi $y = \frac{5x^4 - x^2}{4(1+x^2)}$ che, con $g = 0$, dá $12x^6 - 21x^4 + 6x^2 + 3 = 0$. Posto $x^2 = t$ si vede facilmente che l'equazione $12t^3 - 21x^4 + 6t^2 + 6t + 3 = 0$ ha un unico zero, positivo, in $t = 1$, da cui $|x| = 1$ e quindi $y = \frac{1}{2}$. Siccome $\nabla g(1,\frac{1}{2}) = \nabla g(-1,\frac{1}{2}) = 0$, concludiamo che **il sistema** $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 0$ **non ha soluzioni**.

Il punto di minimo deve quindi essere un punto singolare di Γ. Confrontando i valori di f in tali punti, concludiamo che $m = f(0,0) = 0$.

Notiamo che a tale risultato si puó pervenire piú facilmente, riconoscendo che $4y^2 - x^4(1+4y) + 2x^6 = 4(y - \frac{x^2}{2})\,(y + \frac{x^2}{2} - x^4)$ e quindi

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 := \{y = \frac{x^2}{2}\}, \qquad \Gamma_2 := \{y = -\frac{x^2}{2} + x^4\}$$

e $f(x,\frac{x^2}{2}) = \frac{3}{2}x^2$, $f(x, -\frac{x^2}{2} + x^4) = \frac{x^2}{2} + x^4$ funzioni che hanno appunto un minimo in $x = 0$.

2 Sia $$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$$

É $\quad f_x = 4x(x^2+y^2) - 4x, \qquad f_y = 4y(x^2+y^2) + 4y$

$f_{xx} = 4(x^2+y^2) + 8x^2 - 4, \qquad f_{xy} = 8xy, \qquad f_{yy} = 4(x^2+y^2) + 8y^2 + 4$

Punti stazionari: $(0,0)$, $(\pm 1, 0))$; $\det H(\pm 1, 0) > 0$, $\det H(0,0) < 0$;
$(\pm 1, 0)$ sono **minimi globali**: $\|u\| \to +\infty \Rightarrow f(u) \to +\infty$; $(0,0)$ é una sella.

Valori critici: $-1 = f(\pm 1, 0)$ (minimo assoluto) $0 = f(0,0)$.

Curve di livello: $\Gamma_c := \{f = c\}$.

Se $c < -1$, $\Gamma_c = \emptyset$; se $c = -1$, $\Gamma_c = \{(-1,0),(1,0)\}$.

Se $-1 < c$, $c \neq 0$ Γ_c é una curva regolare, inoltre Γ_c é un insieme simmetrico rispetto agli assi e all'origine (segue dall'invarianza di f rispetto alle riflessioni $(x,y) \to (-x,y)$, $(x,y) \to (x-y)$, $(x,y) \to (-x,-y)$).

Per tali valori di c, $\Gamma_c \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$ é grafico della funzione (implicitamente definita dall'equazione $f = c$)

$$y(x) = \left[\sqrt{4x^2+1+c} - (x^2+1)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$1 - \sqrt{1+c} < x < 1 + \sqrt{1+c}$ se $c \leq 0$, $0 \leq x < 1 + \sqrt{1+c}$ se $c \geq 0$.

In particolare, se $c < 0$, Γ_c é una coppia di 'circoli' attorno a $(-1,0),(1,0)$ rispettivamente, mentre per $c > 0$, Γ_c é immagine della circonferenza unitaria $h^2 + k^2 = 1$, attraverso la 'parametrizzazione'

$$x = r(h,k)h, \quad y = r(h,k)k, \quad h^2+k^2 = 1, \quad r^2(h,k) = h^2 - k^2 + \sqrt{(h^2-k^2)^2 + c}$$

ottenuta chiedendo che $(r^2h^2 + r^2k^2)^2 - 2r^2(h^2+k^2) = c$ e risolvendo questa equazione, per h, k fissati, nell'incognita $r > 0$.

Notiamo anche qui il drastico cambio nella natura dei sottolivelli $\{f \leq c\}$ quando c attraversa il valore critico $c = 0$: da due 'dischi' disgiunti (insieme disconnesso) ad un solo 'disco'.

La curva $\Gamma_0 :$ $(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$ (**Lemniscata di Bernoulli**)

É una curva regolare in ogni suo punto diverso da $(0,0)$, simmetrica rispetto agli assi e all'origine e compatta, e infatti

$$\Gamma_0 \cap \{x \geq 0, y \geq 0\} \subset \{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

(disco di centro $(\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ e raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$) giacché $(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+y^2>\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x^2+y^2>\sqrt{2}x \;\Rightarrow\; f(x,y)>2y^2\geq 0$.

$\Gamma_0\cap\{x\geq 0, y\geq 0\}$ é il grafico di $y(x)=\sqrt{\sqrt{4x^2+1}-(x^2+1)}$, $0\leq x\leq 2$ che ha derivata $y'=-\frac{f_x}{f_y}(x,y(x))$. Si vede facilmente che y' si annulla in $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ punto in cui $y(x)$ raggiunge il suo massimo.

Notiamo infine che $y(x)\to_{x\to 0} 0$ e quindi $y'(x)=-\frac{x^2+y^2(x)-1}{x^2+y^2(x)+1}\to_{x\to 0} 1$. Dunque, Γ_0 ha in $(0,0)$, due rette tangenti, di equazione complessiva $x^2-y^2=0$.

3 Sia $g(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$, $\Gamma=g^{-1}(0)$, $d(x,y)=(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+y^2$

Determinare $\quad m :== \inf_\Gamma d, \quad M := \sup_\Gamma d.$

Intanto, siccome Γ é un insieme compatto (vedi esercizio 4) e d é continua, m,M sono finiti, e sono infatti il minmo/massimo valore di d su Γ.

Tali valori dovranno essere presi o nel punto singolare di Γ, cioé $(0,0)$, oppure in (x,y), soluzione del sistema di Lagrange $\nabla d=\lambda\nabla g$, $g=0$.

Siccome $\nabla d=0 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=0$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ non appartiene a Γ, dovrá essere $\lambda\neq 0$. Possiamo quindi riscrivere il sistema di Lagrange nella forma

$$x(x^2+y^2)-x=\lambda(x-\frac{\sqrt{2}}{2}), \quad y(x^2+y^2)+y=\lambda y, \quad (x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$$

Dalla seconda equazione: $y=0$ oppure $x^2+y^2+1=\lambda$ (e in tal caso $\lambda>1$).

Se $y=0$, da $0=g(x,0)$ segue $x=\pm\sqrt{2}$.

Se $y\neq 0$, ponendo $x^2+y^2=\lambda-1$ nella prima equazione, otteniamo $\lambda=2\sqrt{2}x$, mentre, da $g=0$ otteniamo $\lambda^2+1=4x^2+2$ e quindi $x=\pm\frac{1}{2}$ e siccome deve essere $\lambda>1$, troviamo le soluzioni $x=\frac{1}{2}$ $y=\pm(\sqrt{2}-\frac{5}{4})^{\frac{1}{2}}$.

Ora, d raggiunge il suo minimo/massimo su Γ o in un punto singolare di Γ o in una soluzione del sistema di Lagrange, ovvero in uno dei punti

$$(0,0), \qquad (\pm\sqrt{2},0), \qquad (\frac{1}{2},\pm(\sqrt{2}-\frac{5}{4})^{\frac{1}{2}}$$

Siccome $\quad d(0,0)=\frac{1}{2} \quad$ e

$$d(\frac{1}{2},\pm(\sqrt{2}-\frac{5}{4})^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1), \qquad d(\sqrt{2},0)=\frac{1}{2}, \qquad d(-\sqrt{2},0)=\frac{9}{2}$$

concludiamo che $m=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ed é realizzato in $(\frac{1}{2},\pm(\sqrt{2}-\frac{5}{4})^{\frac{1}{2}})$, mentre $M=\frac{9}{2}$ é realizzato in $(-\sqrt{2},0)$.

4 Siano $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad \Gamma = \{(x,y): \quad g(x,y) = 0, \; x \geq 0, \; y \geq 0\}$.

Sia $f(x,y) := (x-1)^2 + (y-1)^2$. Calcolare

$$m := \inf_{\Gamma} f, \quad M := \sup_{\Gamma} f$$

Siccome $x^3 + y^3 = (x+y)\,(x^2 - xy + y^2)$, si ha che

$$y > 3 - x \quad \Rightarrow \quad g(x,y) \geq (x+y)\,\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{3}{2}(x^2+y^2) = \frac{x^2+y^2}{2}\,(x+y-3) > 0$$

e quindi

$$\Gamma \subset \{(x,y): \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; y \leq 1 - x\}$$

e quindi $M < +\infty$. Ovviamente $m \geq 0$.

Notiamo che $\nabla g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y, \quad y^2 = x$ e quindi $(0,0)$ é l'unico punto singolare di Γ.

Siccome $(1,1)$ é l'unico punto critico di f e $(1,1)$ non appartiene a Γ, il sistema di Lagrange associato al problema si puó scrivere

$$\nabla g(x,y) = \lambda \nabla f(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma \qquad \text{ovvero}$$

$$3x^2 - 3y = 2\lambda(x-1), \quad 3y^2 - 3x = 2\lambda(y-1)$$
$$x^3 + y^3 = 3xy, \quad x \geq 0, \; y \geq 0$$

che comporta $\frac{x^2-y}{x-1} = \frac{y^2-x}{y-1}$ (perché $(1,1)$ non é soluzione).

Da tali equazioni deduciamo $xy(x-y) = x - y$.
Se $x = y$, da $g = 0$ otteniamo $x = y = \frac{3}{2}$.
Se $x \neq y$ allora $xy = 1$ e quindi $x^3 + \frac{1}{x^3} = 3$ che dá le soluzioni

$$\left((\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}}, (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}} \right), \quad \left((\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}}, (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}} \right)$$

In tali punti f prende il valore $c = [1 - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}}]^2 + [1 - (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}}]^2$.
Siccome $f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$, concludiamo che

$$m = \min\{\frac{1}{2}, c\}, \qquad M = 2 = f(0,0)$$

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

DIPENDENZA CONTINUA

Sia $f \in C((t_0-\delta, t_0+\delta)\times(a,b))$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. Supponiamo

(equidominatezza) $\exists\ g$ integrabile in $(a,b):\ |f(t,x| \le g(x) \quad \forall t,x$

$$\text{Allora} \qquad t \to \int_a^b f(t,x)\,dx \quad \text{é continua in} \quad (t_0-\delta, t_0+\delta)$$

Prova. Grazie ad Heine-Cantor, $t_n \to t \Rightarrow f_n(x) := f(t_n,x)$ converge uniformemente sui sottoinsiemi chiusi e limitati di (a,b). Ció, insieme alla equidominatezza, assicura che $\int_a^b f(t_n,x)\,dx \to \int_a^b f(t,x)\,dx$.

DERIVAZIONE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE.

Sia $f \in C([t_0-\delta, t_0+\delta]\times(a,b))$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. Supponiamo che

$i)$ $\frac{\partial f}{\partial t}$ esiste ed é continua in $[t_0-\delta, t_0+\delta]\times(a,b)$

$ii)$ $\exists\ g$ integrabile in $(a,b):\ |f_t(t,x| \le g(x) \quad \forall t,x.$

Allora $t \to \int_a^b f(t,x)\,dx$ é derivabile $\forall\, t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ e

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(t,x)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

Prova. Sia $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$, $\tau_n \to 0$. É $\frac{f(t+\tau_n,x)\,-\,f(t,x)}{\tau_n} - f_t(t,x) =$

$$\frac{1}{\tau_n}\int_0^1 [\frac{d}{ds}f(t+s\tau_n,x)]\,ds - f_t(t,x) = \int_0^1 [f_t(t+s\tau_n,x) - f_t(t,x)]\,ds \to_n 0$$

uniformemente in $x \in [c,d] \subset (a,b)$ (Heine-Cantor). Inoltre

$$\int_0^1 |f_t(t+s\tau_n,x) - f_t(t,x)|\,ds \le 2g(x) \qquad \text{Dunque}$$

$$\left| \frac{\int_a^b f(t+\tau_n,x)\,dx - \int_a^b f(t,x)dx}{\tau_n} - \int_a^b f_t(t,x)\,dx \right| \le$$

$$\int_a^b \left[\int_0^1 |f_t(t+s\tau_n,x) - f_t(t,x)]\, ds| \right] dx \ \to_n 0$$

ESEMPIO. $f(t,x) = \frac{\sin x}{x} e^{-tx}$, $f_t(t,x) = -\sin x e^{-tx}$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$ sono continue.

Inoltre $t \ge t_0 > 0 \ \Rightarrow \ |f(t,x)| + |f_t(t,x)| \le e^{-t_0 x}$ e $\int_0^{+\infty} e^{-t_0 x}\, dx = \frac{1}{t_0}$.

Dunque $\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x\, dx$. Integrando per parti si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx = -\frac{1}{1+t^2}$$

CONVOLUZIONE Siano $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi \in C_0^\infty$ f continua. Allora

$$(f * \varphi)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\varphi(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)\, dt = (\varphi * f)(x)$$

é C^∞ e

$$\frac{d^k}{dx^k}(f * \varphi)(x) = (f * \frac{d^k \varphi}{dx^k})(x)$$

Prova. La prima affermazione segue effettuando il cambio di variabile $t = x - y$. Si puó dunque derivare sotto segno di integrale, giacché cé' equidominatezza:

$$|\frac{d^k}{dx^k} f(t) g(x-t)| = |f(t)\, g^{(k)}(x-t)| \le c_k |f(t)| \chi_{[-R,R]}, \ \ c_k := \sup_{x \in \mathbf{R}} |g^{(k)}(x)|$$

ove R é tale che $g(x-t) = 0$ se $|t| \ge R$ e $|x| \le c$.

REGOLARIZZAZIONE PER CONVOLUZIONE

Sia $\varphi \in C_0^\infty$, $\varphi \ge 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$ (φ **nucleo regolarizzante**).

Sia $\varphi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. (**successione regolarizzante**)

Sia f continua. Allora

$$f * \varphi_\epsilon \to_{\epsilon \to 0} f \quad \text{uniformemente sui limitati}$$

APPENDICE

Prova del Teorema di Regolarizzazione per convoluzione.

$\varphi_\epsilon(x) = 0$ se $|x| \geq \epsilon$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\epsilon(x-y)\,dy = 1 \Rightarrow$

$$\sup_{|x|\leq R} |f(x)-(f*\varphi_\epsilon)(x)| \leq \sup_{|x|\leq R} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)-f(y)|\varphi_\epsilon(x-y)dy \leq \sup_{|x|\leq R,\,|x-y|\leq\epsilon} |f(x)-f(y)|$$

Ma $\sup_{|x|\leq R,\,|x-y|\leq\epsilon} |f(x)-f(y)| \to_{\epsilon\to 0} 0$, perché

f é uniformemente continua in $[R-\epsilon,\ R+\epsilon]$.

La funzione Γ di Eulero $\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1}\,e^{-t}\,dt, \quad s>0$

La funzione Γ é definita in $(0,+\infty)$ perché $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-s}} < +\infty \quad \forall s>0$ e $e^{-t}\,t^{s-1}$ va a zero, per t che va all'infinito, piú rapidamente di ogni potenza di $\frac{1}{x}$. Inoltre,

$0 < \underline{s} < \overline{s}, \quad s \in [\underline{s}, \overline{s}] \quad \Rightarrow \quad t^{s-1} \leq t^{\underline{s}-1}\chi_{[0,1]}(t) + t^{\overline{s}-1}\chi_{[1,+\infty)}(t) \quad \forall t$

$\Rightarrow$ $t^{s-1}\,e^{-t}$ é (continua ed) **equidominata** (per $s \in [\underline{s}, \overline{s}]$) da una funzione integrabile e quindi $\Gamma(s)$ **dipende in modo continuo** da s.

Siccome $\frac{\partial}{\partial s}t^{s-1}\,e^{-t} = t^{s-1}\log t\,e^{-t}$ é ugualmente continua ed equidominata, Γ é derivabile, con $\Gamma'(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\log t\,e^{-t}\,dt, \quad s>0$. Γ é infatti C^∞. Ad esempio, $\Gamma''(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\,(\log t)^2\,e^{-t}\,dt$ (Γ é strettamente convessa).

(i) $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s), \quad \Gamma(n+1) = n!$ Integrando per parti: $\int_0^\infty t^{s-1}\,e^{-t}\,dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty t^s\,e^{-t}\,dt + \lim_{t\to+\infty}\frac{t^s}{s}\,e^{-t}|_{t=0}^t$. Inoltre, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$

Segue in particolare che: $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} \to_{s\to 0^+} +\infty$.

Infine, $\Gamma(s+1) \geq \int_s^\infty t^s\,e^{-t}\,dt = s^s\,e^{-s} \to_{s\to+\infty} +\infty$.

(ii) $\Gamma(s+1) = s^{s+1}\,e^{-s}\int_0^\infty e^{-s(\tau-\log\tau-1)}\,d\tau$. Segue dal cambio di variabile

$$t = s\tau: \quad \int_0^\infty t^{s-1}\,e^{-t}\,dt = s^s\int_0^\infty \tau^s e^{-s\tau} s d\tau = s^{s+1}\,e^{-s}\int_0^\infty e^{s\log\tau}\,e^{-s\tau+s}$$

(iii) **La formula di Stirling**

$$\Gamma(s+1) \ = \ s^{s+\frac{1}{2}} \, e^{-s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \ + \ \circ(1) \right], \quad \text{per} \quad s \to +\infty$$

Vista (ii), e dopo aver posto $\ t = \tau - 1$, resta da provare che

$$\lim_{s \to +\infty} \sqrt{s} \int_{-1}^{\infty} e^{-s\,[t - \log(1+t)]} \, dt \ = \ \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$$

Per calcolare tale limite, notiamo in primo luogo che

(k) $\ \frac{d}{dt}[t - \log(t+1)] \geq 0 \ \ \forall t \geq 0, \qquad \exists t_0 : \ t \geq t_0 \ \Rightarrow \ t - \log(t+1) \geq \frac{t}{2}$

(kk) $\ \epsilon > 0, \ \ -1 \leq t \leq \frac{\epsilon}{2} \ \ \Rightarrow \ \ t - \log(1+t) \geq \frac{t^2}{2+\epsilon}$,

(kkk) $\ \epsilon > 0, \ \ t \geq -\frac{\epsilon}{2} \ \ \Rightarrow \ \ t - \log(1+t) \leq \frac{t^2}{2-\epsilon}$

Da (kk) segue

$$\sqrt{s} \int_{-1}^{\infty} e^{-s\,[t - \log(1+t)]} \, dt \ \geq \sqrt{s} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\infty} e^{-\frac{st^2}{2-\epsilon}} \, dt \ = \ \sqrt{2-\epsilon} \int_{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{s}{2-\epsilon}}}^{+\infty} e^{-\tau^2} \, d\tau$$

Da (k)-(kkk) segue che

$$\sqrt{s} \int_{-1}^{+\infty} e^{-s\,[t - \log(1+t)]} \, dt \ \leq \ \sqrt{s} \left[\int_{-1}^{\frac{\epsilon}{2}} e^{-\frac{st^2}{2+\epsilon}} \, dt + \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{t_0} e^{-s[\frac{\epsilon}{2} - \log(1+\frac{\epsilon}{2})]} \, dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-\frac{st}{2}} \, dt \right]$$

$$\leq \sqrt{2+\epsilon} \ \int_{-\sqrt{\frac{s}{2+\epsilon}}}^{\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{s}{2+\epsilon}}} e^{-\tau^2} \, d\tau \ + \ t_0 \sqrt{s} \ \ e^{-\frac{s\epsilon^2}{8+2\epsilon}} + \ \frac{2e^{\frac{-t_0}{2}s}}{s}$$

Preso $\ \ \epsilon = s^{-\delta}, \ \ \delta \in (0, \frac{1}{2}), \ \ $ si ha

$$\int_{-\sqrt{\frac{s}{2+\epsilon}}}^{\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{s}{2+\epsilon}}} e^{-\tau^2} \, d\tau \to_{s \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt, \quad \sqrt{s} \ \ e^{-\frac{s\epsilon^2}{8+2\epsilon}} \to_{s \to +\infty} 0$$

e quindi

$$\circ(1) + \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt \leq \sqrt{s} \int_{-1}^{\infty} e^{-s\,[t - \log(1+t)]} \, dt \ \leq \circ(1) + \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$$

Il Teorema di aprossimazione di Weierstrass. Sia $f \in C([a,b])$. Allora esiste una successione di polinomi che converge uniformemente ad f in $[a,b]$.

Sia $[a,b] \subset [-\frac{R}{3}, \frac{R}{3}]$, e indichiamo ancora con f un prolungamento continuo di f a tutto $\mathbf{R}$, tale che $f \equiv 0$ fuori di $[-\frac{2}{3}R, \frac{2}{3}R]$. Sia

$\varphi_n(t) = (R^2 - t^2)^n, \qquad c_n := (\int\limits_{-R}^{R} [R^2 - t^2]^n \, dt)^{-1}.$

É $\int\limits_{-R}^{R} [R^2 - t^2]^n \, dt = R^{2n+1} \int\limits_{0}^{1} (1-s^2)^n ds = R^{2n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Dunque

$c_n \int\limits_{-R}^{R} \varphi_n(t) \, dt = 1, \qquad c_n = O(\sqrt{n})$. Inoltre $\forall \delta > 0: \; c_n \int\limits_{\delta}^{R} \varphi_n(t) \, dt \to_n 0.$

Infatti $\int\limits_{\delta}^{R} (R^2 - t^2)^n \, dt = R^{2n+1} \int\limits_{\frac{\delta}{R}}^{1} (1-s^2)^n \, ds \le R^{2n+1} (1 - \frac{R^2}{\delta^2})^n = \circ(\frac{1}{\sqrt{n}}).$

Sia $\quad p_n(x) := c_n \int_{-\frac{2}{3}R}^{\frac{2}{3}R} f(y) \varphi_n(x-y) \, dy, \quad |x| \le \frac{1}{3}$

La prova del Teorema segue dalle proprietá

(i) $\;p_n$ sono polonomi $\qquad$ (ii) $\;p_n \to_n f$ uniformemente in $[-\frac{R}{3}, \frac{R}{3}]$

Prova di (i). $\qquad [R^2 - (x-y)^2]^n = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k(y) \, x^k \Rightarrow$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)[R^2 - (x-y)^2]^n = \sum\limits_{k=0}^{2n} x^k \int\limits_{-\frac{2}{3}R}^{\frac{2}{3}R} f(y) a_k(y) \, dy$$

Prova di (ii). Dato $\epsilon > 0$, sia $\delta = \delta_\epsilon$: $\quad |t| \le \delta_\epsilon \;\Rightarrow\; |f(x-t) - f(x)| \le \epsilon.$

$$|x| \le \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad |p_n(x) - f(x)| = c_n \Big| \int_{x-\frac{2}{3}R}^{x+\frac{2}{3}R} f(x-t) \, \varphi_n(t) \, dt - \int_{-R}^{R} f(x) \, \varphi_n(t) \, dt \Big| \le$$

$$\le c_n \int_{x-\frac{2}{3}R}^{x+\frac{2}{3}R} |f(x-t) - f(x)| \, \varphi_n(t) \, dt + c_n \sup |f| \, [\int_{-R}^{x-\frac{2}{3}R} \varphi_n(t) \, dt + \int_{x+\frac{2}{3}R}^{R} \varphi_n(t) \, dt] \le$$

$$\le \epsilon c_n \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) dt + 2 \sup |f| c_n [\int_{x-\frac{2}{3}R}^{-\delta} \varphi_n(t) dt + \int_{\delta}^{x+\frac{2}{3}R} \varphi_n(t) dt] + 2 \sup |f| c_n \int_{\frac{1}{3}R}^{R} \varphi_n(t) dt \le$$

$$\le \epsilon \; c_n \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) \, dt + 6 \sup |f| \; c_n \int_{\frac{1}{3}R}^{R} \varphi_n(t) \, dt$$

perché $\quad |x| \le \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; -R \le x - \frac{2}{3}R \le -\frac{1}{3}R, \quad \frac{1}{3}R \le x + \frac{2}{3}R \le R.$ Dunque $\sup_{|x| \le \frac{1}{3}} |p_n(x) - f(x)| \le \epsilon + \circ(1)$ e quindi

$$\limsup_n \; [\; \sup_{|x| \le \frac{1}{3}} \; |p_n(x) - f(x)| \;] \le \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$