AM2: Tracce delle lezioni-VII settimana

SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR

FORMULA DI TAYLOR Sia $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$. Allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n +$$

$$+ \frac{1}{n!}(x-x_0)^{n+1} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx+(1-t)x_0)dt$$

Infatti, sia $|x-x_0| < \delta$ e $\varphi(t) := f(tx+(1-t)x_0),\ t \in [0,1]$. É

$$\varphi(1) = f(x), \quad \varphi(0) = f(x_0), \quad \varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(tx+(1-t)x_0)(x-x_0)^k.$$

La formula di Taylor per φ

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \varphi^{(n+1)}(t)dt$$

dá la formula voluta per f.

NOTA.

(i) $R_n(x,x_0) := \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx+(1-t)x_0)dt$, resto nella formula di Taylor per f, di ordine n e di punto iniziale x_0 , é infinitesimo di ordine $n+1$.

Effettuando il cambio di variabile $t = \frac{\tau - x_0}{x-x_0}$ si ha anche

$$R_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(\tau)(x-\tau)^n d\tau$$

(ii) $R_n(x,x_0) := \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{t}x + (1-\bar{t})x_0)$ per un $\bar{t} \in [0,1]$.

É questa la rappresentazione del resto nella forma di Lagrange, e segue dalla rappresentazione del resto in forma integrale e dal teorema della media.

SERIE DI TAYLOR Sia $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

si chiama serie di Taylor di f di punto iniziale x_0

SVILUPPABILITÁ IN SERIE DI TAYLOR f si dice **sviluppabile in serie di Taylor** attorno ad x_0 se

$$\exists r>0: \quad f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x\in(x_0-r,x_0+r)$$

UN ESEMPIO: $f(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $|x|<r=\limsup_n |a_n|^{-\frac{1}{n}}$. Infatti $f\in C^\infty((-r,r))$ e $f^{(n)}(0) \;=\; n!a_n$ ovvero $f(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, $|x|<r$.

Si hanno ad esempio i seguenti sviluppi in serie di Taylor (validi per $|x|<1$):

$$\frac{1}{1-x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad \frac{1}{1+x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \frac{1}{1+x^2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \;=\; \frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{1-x} \;=\; \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty}x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}x^n$$

$$\log(1+x) \;=\; \int_0^x\frac{dt}{1+t} \;=\; \int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n]\,dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

$$\arctan x \;=\; \int_0^x\frac{dt}{1+t^2} \;=\; \int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}]\,dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

Proposizione $f\in C^\infty((x_0-\delta,x_0+\delta))$ é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad x_0 sse $\exists r>0: \;\; R_n(x,x_0)\rightarrow_{n\rightarrow+\infty}0 \;\; \forall x\in[x_0-r,x_0+r]$.

Infatti $f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \;=\; R_N(x,x_0)$.

In particolare, se per ogni $r>0$ risulta $\max_{|x|\leq r}|f^{(n)}(x)| \;\leq\; M_r \quad \forall n$, allora $|x|\;\leq r \;\;\Rightarrow\;\; |R_n(x)| \;\leq\; \frac{r^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n\sup_{|x|\leq r}|f^{(n+1)}(x)|\,dt \;\leq\; \frac{M_r\,r^{n+1}}{n+1!}\rightarrow_n 0 \;\;\Rightarrow$

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \qquad \forall x\in\mathbf{R}$$

Si ottengono subito, ad esempio, i seguenti sviluppi in serie

$$e^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \sin x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cos x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} \quad \forall x$$

$$\sinh x \ = \ \frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \ - \ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}] \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cosh x \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}$$

SERIE BINOMIALE

$$(1+x)^{\alpha} \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n \qquad \forall x\in(-1,1)$$

Infatti, $\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^{\alpha} \ = \ \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \ \Rightarrow \ |R_n(x)| \le$

$$\frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}\int_0^1[\frac{1-t}{1+tx}]^n(1+tx)^{\alpha-1}dt$$

$$\le \ \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}\int_0^1(1+tx)^{\alpha-1}dt \ \to 0$$

perché $1-t \ \le \ 1+tx \ \ \forall x \ \in \ (-1,1)$, $\int_0^1(1+tx)^{\alpha-1}dt \ < \ +\infty$ e, se $b_n := \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}$, $\frac{b_n}{b_{n-1}}\to|x|<1 \quad\Rightarrow\quad b_n\to 0.$

Ad esempio,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{2n-1!!}{n!}x^n \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n-1!!}{2n!!}x^n \qquad \forall x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1!!}{2n!!}x^{2n} \qquad \forall x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n-1!!}{2n!!}x^{2n} \qquad \forall x\in(-1,1)$$

e , integrando $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, otteniamo anche

$$\sin^{-1}x \ = \ x \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)}x^{2n+1} \qquad \forall x\in(-1,1)$$

$$\sinh^{-1}x \ = \ x \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)}x^{2n+1} \qquad \forall x\in(-1,1)$$

FUNZIONI ANALITICHE

Una funzione f si dice analitica in un intervallo aperto I se é localmente somma di una serie di potenze:

$\forall x_0 \in I, \exists r(x_0) > 0$ tale che $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in $(x_0-r(x_0), x_0+r(x_0))$.

NOTA. Una funzione analitica in I, essendo localmente somma di una serie di potenze, é $C^\infty(I)$. In particolare, $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ é la serie di Taylor di f attorno a x_0. Tuttavia non tutte le funzioni $C^\infty(I)$ sono analitiche in I:

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ é C^∞, con derivate di ogni ordine uguali a zero in $x = 0$: dunque f non é somma della sua serie di Taylor.

Proposizione Sia $f \in C^\infty((a,b))$. Se

$$\exists\ M,\ r > 0 : \quad \sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \ \leq \ \frac{Mn!}{r^n} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}$$

allora f é analitica in (a,b), e infatti $\forall\ x_0 \in (a,b)$, si ha

$$f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap [a,b]$$

Dimostrazione. Si tratta di mostrare che $R_n(x,x_0) \to 0$ al tendere di n all'infinito, per ogni $x \in x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap [a,b]$. E infatti

$$|R_n(x,x_0)| \ \leq \ \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |f^{(n+1)}(tx+(1-t)x_0)| dt \leq \ M(\frac{|x-x_0|}{r})^{n+1} \to 0$$

La somma di una serie di potenze é una funzione analitica.

Sia $f(x) \ = \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n$ somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza r, e siano $0 \ < \ \underline{r} \ < \ \overline{r} \ < \ r$. Da $\limsup_k |a_k|^{\frac{1}{k}} \ < \ \frac{1}{\overline{r}}$ segue che

$$\exists\ \overline{k} : \qquad |a_{j+k}| \ \leq \ \frac{1}{\overline{r}^{j+k}}, \qquad \forall k \geq \overline{k}, \ \ \forall j \in \mathbf{N}$$

Da $\quad f^{(k)}(x) \ = \ \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} \, a_{j+k}\, x^j \quad$ segue

$$|x| \ \leq \ \underline{r} \ \Rightarrow \quad |f^{(k)}(x)| \ \leq \ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} \ \frac{\underline{r}^j}{\overline{r}^j} \ \ \frac{1}{\overline{r}^k}$$

Usando ora la formula $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} x^j = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1,1),$ otteniamo

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{\overline{r}^k (1 - \underline{r} \ \overline{r}^{-1})^{k+1}} = \frac{\overline{r}\, k!}{(\overline{r} - \underline{r})^{k+1}}, \quad \forall k \geq \overline{k}, \ |x| \leq \underline{r}$$

Come noto, tale stima assicura che f é sviluppabile in serie di Taylor (di raggio di convergenza almeno $\overline{r} - \underline{r}$) attorno ad ogni punto dell'intervallo $[-\underline{r}, \underline{r}]$.

Principio di identitá Siano f, g analitiche in (a,b). Allora

$$\exists\, x_0 \in (a,b): \quad f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \ \ \forall n \in \mathbf{N} \qquad \Rightarrow \qquad f \equiv g \ \text{in}(a,b)$$

Dall'analiticitá: $\exists \delta > 0 : f(x) = g(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e quindi

$$b' := \sup\{x < b : \ f(t) = g(t) \quad \forall t \in [x_0, x]\} \geq x_0 + \delta > x_0$$

Ora, $x < b' \Rightarrow f \equiv g$ in $[x_0, x] \Rightarrow f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ in $[x_0, b')$, $\forall n$.

Se fosse $b' < b$, sarebbe , per continuitá, $f^{(n)}(b') = g^{(n)}(b') \ \ \forall n$ e quindi $f \equiv g$ in un intorno di b', contraddicendo la natura di sup di b'.

Zeri di funzioni analitiche Una funzione analitica in (a,b) e non identicamente nulla, ha, in (a,b), solo zeri isolati.

Se $x_n \to_n x \in (a,b)$, $f(x_n) = 0$ é $f(x) = 0$ ed inoltre, per il teorema di Rolle, $\exists x'_n$ tra x_n e x tale che $f'(x'_n) = 0$ e quindi $f'(x) = \lim_n f'(x'_n) = 0$ Iterando l'argomento, si trovano, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $x_n^{(k)}$ zeri di $f^{(k)}$ che convergono a x e quindi $f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k$ e quindi $f \equiv 0$.

ESERCIZI.

1. Serie di Taylor di $\sin^2 x$. Da $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, segue

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2n!}] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{2n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!} x^{2k+2}$$

2. Serie di Taylor di $E(x) := \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

$$E(x) = \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}]\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x [\frac{t^{2n}}{n!}]\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

SERIE DI POTENZE NEL CAMPO COMPLESSO

1. Definizione $z_n \in \mathbf{C}$ converge a z $(z_n \to_n z)$ $\Leftrightarrow$ $|z_n - z| \to_n 0$.

Siccome $|z_n - z|^2 = |Rez_n - Rez|^2 + |Imz_n - Imz|^2$, si ha che:

$$z_n \to_n z \qquad \Leftrightarrow \qquad Rez_n \to_n Rez \quad \text{e} \quad Imz_n \to_n Imz$$

$$z_n \to_n z \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon : \quad n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |z_n - z_m| \leq \epsilon \quad (\textbf{Cauchy})$$

2. Definizione $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge sse $S_N := \sum\limits_{n=1}^{N} z_n$ converge.

$\sum_n z_n$ si dice assolutamente convergente se $\sum_n |z_n| < +\infty$.

(**Cauchy**) $\sum_n z_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon :\ |\sum\limits_{n=N}^{N+p} z_n| \leq \epsilon \quad \forall N \geq N_\epsilon,\ \forall\, p.$

In particolare, $\sum_n |z_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_n z_n$ converge e in particolare,

$\limsup_n |z_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \ \Rightarrow \ \sum_n |z_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum z_n$ converge. Si ha cosí

3. Cauchy-Hadamard Sia $a_n \in \mathbf{C}$, $r := \limsup_n |a_n|^{-\frac{1}{n}}$. Allora

$$z \in \mathbf{C}, \quad |z| < r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \ < \ +\infty \ , \qquad |z| > r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \ = \ +\infty$$

r:= raggio di convergenza, $D_r := \{z :\ |z| < r\}$:= disco di convergenza .

ESEMPI. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ converge in $|z| < 1$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \ = \ \frac{1}{1-z}$.

$$\exp\ z \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{converge} \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

4. Definizione $O \subset \mathbf{C}$ é aperto, se $z_0 \in O, z_n \to_n z_0 \quad \Rightarrow z_n \in O$ definitivamente (ovvero $z_0 \in O \quad \Rightarrow \quad \exists D_r(z_0) := \{z \in \mathbf{C} :\ |z - z_0| < r\} \subset O$).

5. Funzioni complesse di variabile complessa. Sia $f : O \to \mathbf{C}$.

f é **continua** in $z_0 \in\ O \ \Leftrightarrow\ \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 :\ \ |z - z_0| \leq \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \leq \epsilon$

f é **derivabile** in $z_0\ \in O$ con derivata $f'(z_0)$ $\Leftrightarrow$

$$\forall\ \epsilon\ >\ 0\, \exists\ \ \delta > 0 :\ \ |z - z_0| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\ -\ f'(z_0)| \leq \epsilon$$

Anche qui, come nel caso reale: f é derivabile in $z_0 \Rightarrow f$ é continua in z_0.

6. Esempio Sia $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza $r > 0$. Allora $f \in C^\infty(D_r)$.

Proviamo che $\frac{d^n f}{dz^n}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^k \quad \forall z \in D_r$. Come nel caso reale, basta provare la formula per $n = 1$. Siano $z,\ z_0 \in D_\rho,\ \ \rho < r$. É

$$|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, |\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}|$$

Ora, $|z^n - z_0^n| = |(z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1})| \le |z - z_0| n \rho^{n-1} \quad \Rightarrow$

$$|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}| = |z^{n-1} - z_0^{n-1} + z_0(z^{n-2} - z_0^{n-2}) + \ldots + z_0^{n-2}(z - z_0)| \le$$

$$\le |z^{n-1} - z_0^{n-1}| + |z_0|\, |z^{n-2} - z_0^{n-2}| + \ldots + |z_0|^{n-2}\, |z - z_0| \le$$

$$\le |z - z_0| \left[(n-1)\rho^{n-2} + (n-2)|z_0|\rho^{n-3} + \ldots + |z_0|^{n-2}\right] \le \frac{n(n-1)}{2} |z - z_0|\, \rho^{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, |\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}| \le |z - z_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, \frac{n(n-1)}{2}\, \rho^{n-2} \to_{z \to z_0} 0$$

perché $\rho < r \Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|\, \frac{n(n-1)}{2}\, \rho^{n-2} < +\infty$.

7. $\exp(z + w) = \exp z + \exp w \qquad \forall\, z,\, w \in \mathbf{C}$. Segue da

8. Lemma (Prodotto secondo Cauchy). $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n| + \sum\limits_{n=0}^{\infty} |w_n| < +\infty \ \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sum_{j+k=n} z_j\, w_k| < +\infty\ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j+k=n} z_j\, w_k) = (\sum_{n=0} z_n)\ (\sum_{n=0} w_n)$$

Infatti, $\exp(z + w) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n!} \sum\limits_{j+k=n} \frac{n!}{j!\,k!}\, z^j\, w^k) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!}\, \frac{w^k}{k!}) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!})\, (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}) = \exp z\, \exp w$$

9. (i) $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$ $\ (ii)$ $\overline{\exp z} = \exp\, \overline{z}$ $\ (iii)$ $\exp r = e^r \quad \forall r \in \mathbf{Q}$

(iv) $|\exp\,(it)| = 1 \quad \forall t \in \mathbf{R}$ e $|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\ !\ t \in (-\pi, \pi] : \quad z = \exp(it)$

In particolare, $x \to \exp x,\ \ x \in \mathbf{R}$ é prolungamento continuo di $r \to e^r, r \in \mathbf{Q}$.

(i) $\exp z \, \exp(-z) = 1$ (ii) $\exp \overline{z} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \lim_{N\to+\infty} \overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp z}$

(ii) $p \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{C} \Rightarrow (\exp z)^p = \exp(pz) \quad \forall p \in \mathbf{N} \Rightarrow (\exp(\frac{1}{p}))^p = e$ ovvero $\exp(\frac{1}{p}) = e^{\frac{1}{p}}$. Quindi $\exp(\frac{p}{q}) = (\exp\frac{1}{q})^p = (e^{\frac{1}{q}})^p = e^{\frac{p}{q}}$.

(iv) $|\exp(it)|^2 = \exp(it)\,\overline{\exp(it)} = \exp(it)\,\exp(-it) = 1$. Poi,
$z = x + iy, \quad x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \exists\, !\ t \in [0, \pi] : \quad x = \cos t = \cos(-t)$ e $y = \sin t$ se $y \geq 0$, $y = \sin(-t)$, $t \in (-\pi, 0]$ se $y < 0$.

In particolare, $\exp(x + iy) = \exp x \, \exp(iy) = (\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$ $\quad x, y \in \mathbf{R}$ e

$$Re(\exp it) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \cos t \qquad Im(\exp it) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin t$$

10. Formule di Eulero

$$\exp it = \cos t + i \sin t \quad \forall\, t \in \mathbf{R}, \qquad \exp(-it) = \cos t - i \sin t \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

$$\sin t = \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i}, \qquad \cos t = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2}$$

In particolare, $\exp it$ é 2π-periodica.

11. Funzioni circolari ed iperboliche sui complessi

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

$$\cosh z := \frac{1}{2}(\exp z + \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

$$\sinh z := \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z)) = \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

12. (i) $\exp(iz) \equiv \cos z + i \sin z, \qquad \exp(-iz) \equiv \cos z - i \sin z$

$$(ii)\ \cos z \equiv \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \equiv \cosh iz \qquad \sin z \equiv \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \equiv \frac{\sinh(iz)}{i}$$

Da (ii) segue: $\sin z, \cos z$ sono funzioni 2π-periodiche mentre $\sinh z, \cosh z$ sono $2\pi i$-periodiche. Inoltre, $\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z \equiv 1$

13. Definizione di $\arg z, \quad \log z, \quad z \in \mathbf{C}$

Dato $z \in \mathbf{C}$, $\arg z$ (**argomento di** z) é l'unico reale in $(-\pi, \pi]$ tale che

$$z = |z| \exp(i \arg z)$$

Notiamo che, per periodicitá, $z = |z| \exp(i(\arg z + 2k\pi)) \;\; \forall\, k \in \mathbf{Z}$. Scriveremo

$$Arg\, z := \{\arg\, z + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}\}$$

Ora, dato $w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0$

$$\exp z = w \quad \Leftrightarrow \quad \exp(Re\, z)\, \exp(i\, Im\, z) = |w| \exp(i\, \arg\, w) \quad \Leftrightarrow$$

$$\exp\, Re\, z = |w| \quad \text{e} \quad Im\, z - \arg w \in 2\pi\, \mathbf{Z} \qquad\qquad \text{cioé}$$

$$\exp\, z = w \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{\log|w| + i\, Arg\, w\}$$

Porremo $\qquad Log\, w := \{\log|w| + i\, Arg\, w\} \quad \forall w \in \mathbf{C}, \;\; w \neq 0$

La funzione $\log w := \log|w| + i \arg w$ si chiama valore principale del logaritmo.

Esempi. $Log\, x = \log x + 2k\pi i, \;\; \forall x > 0, \;\; Log\, x = \log|x| + (2k+1)\pi i, \;\; \forall x > 0.$ $Log\,(-1) = \pi i, \;\; Log\, i = \frac{\pi}{2} i, \;\; Log\,(1-i) = \log\sqrt{2} + (2k - \frac{1}{4})i.$

Esercizi.

$Log\,(zw) = Log\, z + Log\, w$ ove, per $A, B \subset \mathbf{C}$, $A + B := \{a + b : a \in A, \; b \in B\}$. Infatti $Arg\,(zw) = Arg\, z + Arg\, w$.

$Log\,(-z) = \{\log\, z + (2k+1)\pi i\} \;\; \forall\, z \neq 0.$

Trovare l'errore in $z^2 = (-z)^2 \Rightarrow Log\,(z)^2 = Log\,(-z)^2 \Rightarrow Log z + Log z = Log(-z) + Log(-z) \Rightarrow 2 Log z = 2 Log(-z) \Rightarrow Log z = Log(-z)$.

14. Potenze in C Se $a, z \in C, a \neq 0$

$$a^z := \exp(z\, Log\, a) = \{\exp[z(\log|a| + i(arg\, a + 2k\pi i)\}$$

Esempi. Se $z = n \in \mathbf{N}$, $a^p = a \times \ldots \times a (p$ volte).

Se $z = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, $a^{\frac{1}{n}} = \{|a|^{\frac{1}{n}} \exp \frac{arg\, a + 2k\pi}{n}, \;\; k = 0, \ldots, n-1\}$ (le n radici complesse di a).

Se $z \notin \mathbf{Q}$, a^z é un insieme infinito. In particolare, $e^z = \exp z$ se e solo se $z = 0, 1, \ldots$.

APPENDICE

A1: Prova di 8. Siano $s_N := \sum_{n=0}^{N} z_n, \quad \sigma_N := \sum_{n=0}^{N} w_n$

$$p_n := \sum_{n=0}^{N}(\sum_{j+k=n} z_j w_k) = z_0w_0+(z_0w_1+z_1w_0)+\ldots+(z_0w_N+z_1w_{N-1}+\ldots+z_{N-1}w_1+z_Nw_0)$$

$= z_0(w_0+w_1+\ldots+w_N)+z_1(w_0+\ldots+w_{N-1})+\ldots+z_Nw_0.$ Dunque

$$|s_N\,\sigma_N \;-\; p_N| \;=$$

$$|z_0(w_0+\ldots+w_N)+z_1(w_0+\ldots+w_N)+\ldots+z_{N-1}(w_0+\ldots+w_N)+z_N(w_0+\ldots+w_N)-$$

$$[z_0\,(w_0+w_1+\ldots+w_N)+z_1\,(w_0+\ldots+w_{N-1})+\ldots+z_{N-1}(w_0+w_1)+z_N\,w_0]| =$$

$$|z_1\,w_N+z_2(w_{N-1}+w_N)+\ldots+z_{N-1}(w_2+\ldots+w_N)+z_N\,(w_1+\ldots+w_N)| \;\le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} |z_j|\,|w_{N-j+1}+\ldots+w_N| \;+\; \sum_{j=n+1}^{N} |z_j|\,|w_{N-j+1}+\ldots+w_N| \;\le$$

$$\le \sup_{j\le n}|z_j|\,(\sum_{k=N-n+1}^{\infty}|w_k|) \;+\; \sup_{j\ge n+1}|z_j|\,(\sum_{k=1}^{\infty}|w_k|) \quad n:=[\frac{N}{2}].$$ Da

$\sum_{k=N-[\frac{N}{2}]+1}^{\infty} |w_k| \to_{N\to+\infty} 0, \; \sup_{j\ge[\frac{N}{2}]+1} |z_j| \to_{N\to+\infty} 0, \;\; \sup_j |z_j| < +\infty, \; \sum_{k=1}^{\infty} |w_k| < \infty$
segue $|s_N\,\sigma_N \;-\; p_N| \to_{N\to+\infty} 0$ e quindi $\lim_N p_N \;=\; \lim_N s_N\,\sigma_N.$

ESERCIZIO. $e := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ É

$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ perché $\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{(n-k)!(n-k-1)\ldots n}{(n-k)!n\,n\ldots n} < 1$

e quindi $$\limsup_n(1+\frac{1}{n})^n \;\le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Viceversa, $n > n_0 \;\; \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n > \sum_{k=0}^{n_0}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n^k} \;\; \Rightarrow \;\; \liminf_n(1+\frac{1}{n})^n \ge \sum_{k=0}^{n_0}\frac{1}{k!},\; \forall n_0$

perché $\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = (1-\frac{1}{n})\,(1-\frac{2}{n})\,\ldots(1-\frac{k-1}{n}) \to_n 1.$ Quindi

$$\liminf_n(1+\frac{1}{n})^n \ge \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$