AM2: Tracce delle lezioni-VI settimana

Serie di funzioni: esempi e complementi.

0 (serie geometrica e suoi derivati).

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \;=\; \frac{1}{1-x} \qquad \text{sse} \quad |x|<1$$

La convergenza é totale in $[-\delta,\delta]\ \forall\,\delta<1$ (non é uniforme in $[1-\delta,1]$: la funzione somma della serie non é limitata attorno ad 1!). In particolare, se $|x|<1$:

$$(i) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\,dt \;=\; \int_0^x [\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}]\,dt \;=\; \int_0^x \frac{dt}{1-t} \;=\; -\log(1-x)$$

Ad esempio, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \;=\; \log 2.$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^n}{n}\,dt] \;=\; \frac{1}{x}\int_0^x [\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}]\,dt \;=\; -\frac{1}{x}\int_0^x \log(1-t)\,dt \;=$$

$$= \frac{(1-x)\log(1-x) \;+\; x}{x}$$

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{x^n}{n(n+1)}| \;\le\; \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{1}{n(n+1)}| \quad \forall x\in[-1,1]$ segue $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)} \;=\; 1-2\log 2.$

$$(iii) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \;=\; x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n \;=\; x\,\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}x^n \;=\; x\,\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} \;=\; \frac{x}{(1-x)^2}$$

Ad esempio, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} \;=\; 2.$

$$(iv)\,\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x [\sum_{n=1}^{\infty}(-t^2)^n]dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1}$$

$$(v) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}} \;=\; \frac{1}{k!}\int_0^{\infty}\frac{t^k}{e^t-1}\,dt \qquad \forall k\in\mathbf{N}$$

É $\int\limits_0^{\infty}\frac{t^k}{e^t-1}\,dt \;=\; \int\limits_0^{\infty}\frac{t^k e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt \;=\; \int\limits_0^{\infty} t^k e^{-t}\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-tn}\,dt \;=\; \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} t^k e^{-(n+1)t}\,dt\,.$ Posto $(n+1)t=s$, si ottiene $\int\limits_0^{\infty} t^k e^{-(n+1)t}\,dt \;=\; \frac{1}{(n+1)^{k+1}}\int_0^{+\infty} s^k\,e^{-s}\,ds \;=\; \frac{k!}{(n+1)^{k+1}}$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad x > 1.$ Da $\sup_{x \geq x_0 > 1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^{x_0}}$ segue che la serie converge totalmente in $[x_0, +\infty), \ \forall x_0 > 1$.

La convergenza non é peró uniforme in $(1, +\infty)$, perché $\frac{1}{n^x}$ non converge uniformemente in $(1, 1+\delta]$, od anche, perché $f(x) \to_{x \to 1^+} = +\infty$ come si vede dal confronto con $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}, \ x > 1$:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(od anche perché la serie diverge in $x = 1$: vedi il punto 2.) Dalla diseguaglianza di sinistra, vediamo poi che $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \to_{x \to +\infty} 0$.

Deriviamo alcune proprietá di $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad x > 1$

f é continua perché somma di una serie uniformemente convergente (in $[1+\delta, +\infty)$) di funzioni continue.
Di piú, $f \in C^{\infty}((1, +\infty))$. Infatti la serie delle derivate k-esime, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\log n)^k}{n^x}$ é totalmente convergente in $[1+\delta, +\infty)$:

$$x \geq 1+\delta \Rightarrow \frac{(\log n)^k}{n^x} \leq \frac{(\log n)^k}{n^{1+\delta}} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^{1+\delta}} < +\infty$$

2. $f_n \in C([a,b])$, $\sum_n f_n$ converge uniformemente in $(a,b]$ $\Rightarrow$ $\sum_n f_n(a)$ converge. Infatti:

$\sum_n f_n$ é Cauchy uniforme in $(a,b]$: $|\sum_{n=N}^{N+p} f_n(x)| \leq \epsilon \ \forall N \geq N_\epsilon, \ p \in \mathbf{N}, \ x \in (a,b]$.

Per continuitá si ha quindi $|\sum_{n=N}^{N+p} f_n(1)| \leq \epsilon \ \forall N \geq N_\epsilon, \ p \in \mathbf{N}$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} x^r e^{-nx} = \frac{x^r}{1-e^{-x}} \quad \forall x > 0.$

La convergenza é totale in $(0, +\infty)$ se $r > 1$:

$(x^r e^{-nx})' = r x^{r-1} e^{-nx} - n x^r e^{-nx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{r}{n} \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \geq 0} x^r e^{-nx} = (\frac{r}{n})^r e^{-r}$

La convergenza non é uniforme in $(0, +\infty)$ se $r \leq 1$: la serie converge infatti, con somma zero, in $x = 0$, mentre $\lim_{x \to 0} f(x) > 0$ se $r \leq 1$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{x}{n}$ converge totalmente sui limitati: $|\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}| \le \frac{|x|}{n^2}$, ma non converge uniformemente in $\mathbf{R}$, perché la successione delle somme parziali $S_N(x) := \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sin\frac{x}{n}$ non é Cauchy uniforme:

$$S_{2N}(N) - S_{N-1}(N) = \sum_{N}^{2N} \frac{1}{n} \sin\frac{N}{n} \ge \sin\frac{1}{2} \sum_{N}^{2N} \frac{1}{n} \ge \frac{1}{2} \sin\frac{1}{2}$$

5 (integrazione per serie ed integrali impropri).

(i) Siano $f_n \ge 0$ ed integrabili in (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$.
Se la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente sui sottointervalli compatti di (a,b), allora

$$\int_a^b [\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)]\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Infatti, posto $S(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$

se $\int\limits_a^b S(x)\,dx < +\infty$, da $\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x) \le S(x)$ segue che la successione delle somme parziali é equidominata e quindi é lecito il passaggio al limite sotto segno di integrale,

se $\int\limits_a^b S(x)\,dx = +\infty$, allora $a < \alpha < \beta < b \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \ge \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx = \int_\alpha^\beta S(x)\,dx \to_{\alpha\to a,\ \beta\to b} = \int_a^b S(x)\,dx = +\infty$$

(ii) Siano $0 \le f_n \in C((a,b))$, e sia $S(x) := \sum_n f_n(x)$. Se S é continua in (a,b) allora

$$\int_a^b \sum f_n(x)\,dx = \sum \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Dal teorema di Dini, applicato a $S - \sum_{k=1}^{n} f_k$, segue che la serie $\sum_n f_n(x)$ converge uniformente in ogni intervallo compatto in (a,b).
Quindi (ii) segue da (i).

6. (**Criterio di Leibnitz**).

Sia $0 \le a_{n+1}(x) \le a_n(x) \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$ Allora,

$$\sup_E a_n \to_{n\to+\infty} 0 \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n(x) \text{ converge uniformemente in } E$$

La serie converge puntualmente in E per il criterio di Leibnitz per le serie numeriche.

La convergenza é uniforme perché

$$-a_{2n-1}(x) \le \sum_{k=2n-1}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \le 0, \quad a_{2n}(x) \ge \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \ge 0 \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow$$

$$|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k(x)| \le a_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \text{uniformemente in} \quad E$$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}}$ converge uniformemente sui limitati (ma non totalmente: la serie é assolutamente divergente $\forall\, x$!). Infatti

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{t}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{t}}}{t^2\sqrt{t}} [x^2 - \frac{t}{2}] < 0 \quad \text{se} \quad x^2 < \frac{t}{2} \quad \Rightarrow$$

$$a_{n-1}(x) \le a_n(x) \quad \text{se} \quad n \le 2x^2, \quad a_{n+1}(x) \le a_n(x) \quad \text{se} \quad n \ge 2x^2$$

ove $a_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}}$. Quindi, $|x| \le M \Rightarrow a_{n+1}(x) \le a_n(x)$ se $n > 2M^2$ ed é quindi applicabile il criterio di Leibnitz al punto 6.

La convergenza é uniforme su tutto $\mathbf{R}$: posto $n_x := \max\{n : n < 2x^2\}$, risulta

$$\forall x : \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n(x) = \sum_{n=1}^{n_x} (-1)^n a_n(x) + \sum_{n>n_x} (-1)^n a_n(x) \qquad \text{e, se} \quad 1 \le p \le n_x$$

$$|\sum_{k=p}^{n_x} (-1)^k a_k(x)| \le a_{n_x}(x), \quad |\sum_{k>n_x} (-1)^k a_k(x)| \le a_{n_x}(x), \quad |a_{n_x}(x)| \le \epsilon \quad \text{se} \quad |x| \ge \frac{1}{\epsilon}$$

La serie é derivabile termine a termine: $\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}\, x\, e^{-\frac{x^2}{n}}$

Infatti la serie delle derivate é totalmente convergente sui limitati:

$$|x| \le M \quad \Rightarrow \quad |\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}\, x\, e^{-\frac{x^2}{n}}| \le M \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

8. Sia $r > 0$ il raggio di convergenza di $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Sia $a_n \geq 0$.

Se $a_n \geq r a_{n+1}$, allora la serie converge uniformemente in $[-r, 0]$. In particolare,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \rightarrow_{x \to -r^+} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n r^n$$

Se $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to +\infty$, la serie converge uniformemente in $(-\infty, 0]$.

La prima affermazione segue dal criterio di Leibnitz: $a_{n+1}|x|^{n+1} \leq a_n|x|^n \Leftrightarrow a_{n+1}|x| \leq a_n$

La seconda affermazione segue come in 7. Notiamo che: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n \rightarrow_{x \to -\infty} 0$

Esempi. $\log(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \rightarrow_{x \to -1^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$.

Analogamente, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

La proprietá in 8. é un caso particolare del

Teorema di Abel Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge in $x = 1$, allora converge uniformemente in $[0, 1]$. In particolare $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n \rightarrow_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

9. Studiare il comportamento della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{n}{2}} \frac{1}{n!!} x^n$$

Studiamo dapprima il comportamento asintotico di $n!!$

Dalla formula di Wallis :

$$\left[\frac{(2n!!)^2}{2n!}\right]^2 = \left[\frac{2n!!}{2n-1!!}\right]^2 = (2n+1) \left[\frac{\pi}{2} + O(\frac{1}{n})\right]$$

e quindi $$(2n)!! = \sqrt{(2n)!}\,(2n+1)^{\frac{1}{4}} \left[(\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{4}} + O(\frac{1}{n})\right]$$

Usando la formula di Stirling,

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \,(\sqrt{2\pi} + O(\frac{1}{n}))$$

otteniamo

$$(2n)!! = \frac{(2n)^n}{e^n}\,[2n(2n+1)]^{\frac{1}{4}}\left[\sqrt{\pi} \;+\; O(\frac{1}{n}))\right] \qquad (2n{-}1)!! = \frac{(2n)^n}{e^n}\left[\sqrt{2} \;+\; O(\frac{1}{n}))\right]$$

e quindi $$(a_{2n})^{-\frac{1}{2n}} = \left[\frac{(2n)!!}{(2n)^n}\right]^{\frac{1}{2n}} = \frac{[2n(2n+1)]^{\frac{1}{8n}}}{\sqrt{e}}\left[\sqrt{\pi} \;+\; O(\frac{1}{n})\right]^{\frac{1}{2n}} \to \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(a_{2n-1})^{-\frac{1}{2n-1}} = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n-1)^{\frac{2n-1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2n-1}} = \left[(\frac{2n}{2n-1})^n\,\frac{\sqrt{2n-1}}{e^n}\right]^{\frac{1}{2n-1}}[\sqrt{2}{+}O(\frac{1}{n})]^{\frac{1}{2n-1}} \to \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Dunque il raggio di convergenza é $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Comportamento in $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$: $\qquad a_{2n}\frac{1}{e^n} = \frac{(2n)^n}{2n!!\,e^n} =$

$$= \frac{1}{[2n(2n+1)]^{\frac{1}{4}}}\,(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + O(\frac{1}{n})) \quad\Rightarrow\quad \sum_n a_{2n}\frac{1}{e^n} = +\infty$$

Dunque la serie diverge in $|x| = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Comportamento in $x = -\frac{1}{\sqrt{e}}$. La serie si scrive $\sum_n\left[\frac{a_{2n}}{e^n} - \frac{a_{2n-1}}{e^{\frac{2n-1}{2}}}\right]$. Siccome

$$\frac{a_{2n-1}}{e^{\frac{2n-1}{2}}} = \frac{(2n-1)^{\frac{2n-1}{2}}}{(2n-1)!!\,e^{\frac{2n-1}{2}}} =$$

$$= \sqrt{e}\,(\frac{2n-1}{2n})^n\,\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\,[\frac{1}{\sqrt{2}} \;+\; O(\frac{1}{n})] = \frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}} + O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$$

si ha

$$\frac{a_{2n}}{e^n} - \frac{a_{2n-1}}{e^{\frac{2n-1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,[2n(2n+1)]^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}} \;+\; O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \;+\; O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$$

concludiamo che $\qquad \sum_n(-1)^n\,a_n\,e^{-\frac{n}{2}} = -\infty.$