AM2: Tracce delle lezioni-V settimana

Passaggio al limite negli integrali impropri Se

(i) $f_n \to_n f$ uniformemente su $[a+\delta, M], \;\; \forall\ \delta > 0, M > a$

(ii) (**equidominatezza**) $\exists g$ tale che $|f_n(x)| \le g(x)\ \forall n, x$ con $\int_a^\infty g < +\infty$

allora $\lim_n \int_a^\infty f_n = \int_a^\infty \lim_n f_n$

Infatti: $\delta > 0,\, M > a+\delta \;\Rightarrow\; |\int_{a+\delta}^{M} f_n - f| \to_{n\to\infty} 0 \;\Rightarrow\; \limsup_n |\int_a^\infty f_n - f| \le$

$$\limsup_n \left[\int_a^{a+\delta} |f_n - f| + \int_M^\infty |f_n - f|\right] \le 2\int_a^{a+\delta} g + 2\int_M^\infty g \le \epsilon \quad \text{se} \quad M \ge M(\epsilon),\, \delta < \delta_\epsilon$$

Esempio 1. $t_n \to_{n\to\infty} t > 0 \;\Rightarrow\; \lim_n \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-t_n x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx$

Equidominatezza : $t_n \ge \frac{t}{2} \;\Rightarrow\; |\frac{\sin x}{x} e^{-t_n x}| \le e^{-\frac{tx}{2}}, \;\; \forall x \ge 0$

Convergenza uniforme : $|\frac{\sin x}{x} [e^{-t_n x} - e^{-tx}]| \le |e^{(t-t_n)x} - 1| \le \epsilon$ se $|t - t_n| x \le \delta_\epsilon$

.

NOTA Dunque $t \to \int_0^\infty e^{-tx}\, \frac{\sin x}{x}\, dx$ é continua in $(0, +\infty)$

Esempio 2. $t \to \int_0^\infty e^{-tx}\, \frac{\sin x}{x}\, dx$ é derivabile in $(0, +\infty)$ con

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-tx}\, \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[e^{-tx}\, \frac{\sin x}{x}\right] dx = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\, \sin x\, dx$$

ovvero $t > 0, \qquad h_n \to_{n\to\infty} 0 \;\Rightarrow$

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\left[\frac{e^{-(t+h_n)x} - e^{-tx}}{h_n}\right] dx = -\int_0^\infty \sin x\, e^{-tx}\, dx$$

Equidominatezza: $|\frac{e^{-(t+h_n)x} - xe^{-tx}}{h_n}| \le e^{-\frac{tx}{2}}, \;\; \forall x \ge 0$ se $|h_n| \le \frac{t}{2}$

Convergenza uniforme : $|\frac{\sin x}{x} [\frac{e^{-(t+h_n x} - e^{-tx}}{h_n} + xe^{-tx}]| \le$

$$\le |\frac{e^{-h_n x} - 1}{h_n} + x| = x|1 - \int_0^1 e^{-\tau h_n x}\, d\tau| \to_{n\to\infty} 0 \quad \text{uniformemente in} \quad x \in [0, M]$$

Passaggio al limite in certi integrali impropri senza equidominatezza

$$f \quad \text{integrabile in } [0,+\infty) \;\Rightarrow\; \int_0^\infty f(x)\; e^{-\frac{x}{n}}\, dx \to \int_0^\infty f(x)\, dx$$

Se $\int_0^{+\infty} |f| \,<\, +\infty$ siamo nella situazione di equidominatezza, che invece non sussiste se $\int_0^{+\infty} |f| \,=\, +\infty$.

Sia $F(x) \;:=\; \int_0^x f,\quad F(+\infty) \;:=\; \int_0^{+\infty} f$. Integrando prima per parti ed effettuando poi il cambio di variabile $x = nt$ troviamo

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-\frac{x}{n}}\, dx \;=\; \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} F(x)\, e^{-\frac{x}{n}}\, dx \;=\; \int_0^\infty F(nt)\, e^{-t}\, dt$$

$$\int_0^\infty F(nt)\, e^{-t}\, dt \to_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty \lim_n F(nt)e^{-t}dt \;=\; \int_0^\infty F(+\infty)\, e^{-t}\, dt \;=\; \int_0^\infty f(x)\, dx$$

ove il passaggio al limite é lecito perché c'é

uniforme convergenza: $\quad |F(nt) \,-\, F(+\infty)| \;=\; |\int\limits_{nt}^\infty f| \;\le\; \epsilon,\;$ se $\; nt \ge M_\epsilon$

equidominatezza: $\quad |F(nx)e^{-x}| \;\le\; e^{-x}\, \sup_{x\ge 0}|F(x)| \;$ e $\; \sup_{x\ge 0}|F(x)| < +\infty.$

Esempio. $$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x}{n}}\, \frac{\sin x}{x}\, dx \;=\; \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Integrale di Dirichlet $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2}$$

Infatti, da $\frac{d}{dt}\int\limits_0^\infty e^{-tx}\, \frac{\sin x}{x}\, dx \;=\; -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\, \sin x\, dx \;=\; -\frac{1}{1+t^2}$ segue

$$\int\limits_0^\infty e^{-tx}\, \frac{\sin x}{x}\, dx \;=\; -\arctan t \,+\, c \to_{t\to+\infty} -\frac{\pi}{2} \,+\, c$$ Siccome

$|\int\limits_0^\infty e^{-nx}\, \frac{\sin x}{x}\, dx| \;\le\; |\int\limits_0^\infty e^{-nx}\, dx| \;=\; \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty e^{-t}\, dt \;=\; \frac{1}{n} \to_{n\to+\infty} 0 \;\Rightarrow\; c \;=\; \frac{\pi}{2}$ si ha

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x}{n}}\, \frac{\sin x}{x}\, dx \;=\; -\arctan\frac{x}{n} \,+\, \frac{\pi}{2} \to_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}$$

D'altra parte, $\quad \lim_n \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x}{n}}\, \frac{\sin x}{x}\, dx \;=\; \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$

Successioni di funzioni: Esercizi e Complementi.

1 Fissato $p \in \mathbf{N}$, $f_n(x) := \frac{n \sin^p x}{x(1+n^2x^2)} \to_{n\to+\infty} 0, \quad \forall x > 0$
La convergenza é uniforme in $[\delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 0$:

$$x \geq \delta \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{n}{\delta(1+n^2\delta^2)} \to_{n\to+\infty} 0$$

Se $p > 2$, la convergenza é uniforme in $[0, +\infty)$:

$$2 < p \leq 3 \;\; \Rightarrow \;\; |f_n(x)| \;\leq\; \frac{1}{n^{p-2}} \; \frac{(nx)^{p-1}}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^{p-2}} \sup_{s\geq 0} \frac{s^{p-1}}{1+s^2} \to_{n\to+\infty} 0$$

$$p \geq 3 \;\; \Rightarrow \;\; |\frac{n \sin^p x}{x(1+n^2x^2)}| \;\leq\; |\frac{n \sin^3 x}{x(1+n^2x^2)}| \;\leq\; \frac{1}{n} \sup_{s\geq 0} \frac{s^2}{1+s^2} \to_{n\to+\infty} 0$$

Invece, se $p \leq 2$, la convergenza in $[0, \delta]$ non é uniforme:

$$\sup_{0<x\leq\delta} |f_n(x)| \geq f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} n^2 \sin^p \frac{1}{n} \to \frac{1}{2} \quad \text{se} \quad p = 2 \quad \text{e diverge se} \quad p < 2$$

2 $f_n(x) := \int\limits_0^x \arctan nt \, dt \;\to_{n\to+\infty}\; f(x) \;:=\; \frac{\pi}{2}|x| \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Infatti, $\arctan nt \to_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}$ uniformemente in $\{|x| \geq \delta\}$ ed é equidominata in $[0, x]$ $\forall x$, giacché é uniformemente limitata : $|\arctan nx| \;\leq\; \frac{\pi}{2}$.

Ció comporta infatti che la convergenza é uniforme sui limitati di $\mathbf{R}$ (ci limitiamo a considerare $x \geq 0$ giacché le funzioni sono pari):

$$|x| \;\leq\; M \quad\; \Rightarrow \quad |\int_0^x \arctan nt \, dt \; - \frac{\pi}{2}x| \;\leq\; \int_0^M |\arctan nt \; - \frac{\pi}{2}| \, dt \;\to_{n\to\infty} 0$$

Notiamo che la funzione limite $f(x) \;:=\; \frac{\pi}{2}|x|$ non é derivabile in $x = 0$.

Notiamo anche che $f_n'(x) \,=\, \arctan nx \,\to\, \frac{x}{|x|}\frac{\pi}{2}$ se $x \neq 0$ e $f_n'(0) = 0, \;\; \forall n$.
In particolare, essendo il limite discontinuo, la convergenza delle f_n' non é uniforme!

3 Sia $r > 0$. $f_n(x) := \frac{n\,x^r}{1+n^2x^2} \to_{n\to\infty} 0 \quad \forall x \geq 0$

Se $r \geq 2$, la convergenza non é uniforme:

$$\sup_{x\geq 0} f_n(x) = +\infty \quad \text{se} \quad r < 2, \qquad \sup_{x\geq 0} f_n(x) == \sup s \geq 0 \frac{s^2}{1+s^2} \quad \text{se} \quad r = 2$$

La convergenza é peró uniforme in $[0, M]$ $\forall\, M > 0$, perché $r \geq 2 \Rightarrow$

$$f_n'(x) := n\,\frac{x^{r-1}[r - n^2x^2(2-r)]}{(1+n^2x^2)^2} > 0 \ \forall x > 0 \ \Rightarrow \ \sup_{x\leq M} f_n(x) = f_n(M) \to_{n\to\infty} 0$$

Se $r < 2$, $\qquad f_n'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = x_n := \sqrt{\frac{r}{2-r}\frac{1}{n}} \to_{n\to\infty} 0,$

e $$\sup_{x\geq 0} f(x) = f(x_n) = \left(\frac{r}{2-r}\right)^{\frac{r}{2}} \frac{2-r}{2n^{r-1}} \to_{n\to\infty} 0 \ \Leftrightarrow \ r > 1$$

Dunque la convergenza é uniforme sse $1 < r < 2$.

Notiamo infine che per $r \in (0,1]$ si ha, per n grande, $\sup_{x\geq\delta} f_n(x) = f_n(\delta) \to_{n\to\infty} 0$, e quindi la convergenza é uniforme in $[\delta, +\infty)$.

4. $f_n \to_{n\to\infty} f$ uniformemente in $[a, +\infty)$, $f_n(x) \to_{x\to+\infty} 0 \ \forall n$

$$\Rightarrow \ f(x) \to_{x\to+\infty} 0$$

Infatti, $|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \epsilon + |f_n(x)|$ se $n \geq n_\epsilon$ e quindi $\limsup_{x\to+\infty} |f(x)| \leq \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$.

Esempio. $e^{-\frac{x^2}{n}}$, $x \neq 0$, converge a 1 in ogni punto e la convergenza non é uniforme (ad esempio lo dice 4.)

5 (Teorema di Dini 1)

Siano $f_n \in C([a,b])$ monotone. Se $f_n(x) \to_{n\to+\infty} f(x) \quad \forall x \in [a,b]$ ed f é continua in $[a,b]$, allora la convergenza é necessariamente uniforme.

Siano f_n non decrescenti (basta altrimenti considerare $-f_n$), e scriviamo

$$|f_n(x) - f(x)| = [\max\{f_n(x), f(x)\} - f(x)] + [\max\{f_n(x), f(x)\} - f_n(x)]$$

Notiamo che $g_n(x) := \max\{f_n(x), f(x)\}$ é continua , non decrescente e

$$0 \leq g_n(x) - f(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq g_n(x) - f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

Si tratta dunque di provare che tale convergenza é uniforme.

Per assurdo : $\quad \exists c>0: \, c \le m_n := \max\limits_{[a,b]} g_n - f \, = \, g_n(x_n) - f(x_n), \quad x_n \to_{n\to+\infty} x_0$

(ove siamo eventualmente passati ad una sottosuccessione convergente della x_n).

Ora, $\quad \forall\ \epsilon>0, \ \exists\ \delta_\epsilon : \quad |f(x)-f(y)| \ \le\ \epsilon \quad \forall\, x,y \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$.

Per n grande, $x_n \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ e quindi, per monotonia,

$$m_n = g_n(x_n) - f(x_n) \ \le g_n(x_0+\delta) \ - \ f(x_0-\delta) \to_{n\to+\infty} 0$$

contraddizione. Argomento analogo per $g_n - f_n$.

6 (Teorema di Dini 2)

Siano $\ f_n \in C([a,b]), \quad f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \ \forall x \in [a,b]$.
Se $\ f_{n+1}(x) \le f_n(x) \, \forall x \in [a,b], n \in \mathbf{N}, \ $ allora f_n converge a uniformemente in $[a,b]$.

Dimostrazione. $\quad$ Chiaramente le f_n sono funzioni non negative e

$$\exists\ x_n \in [a,b] \ : \quad 0 \le m_n \ := \ \max_{x\in[a,b]} f_n(x) \ = \ f_n(x_n)$$

É $\quad m_{n+1} \,=\, f_{n+1}(x_{n+1}) \,\le\, f_n(x_{n+1}) \,\le\, f_n(x_n) \,=\, m_n \ $ ed $\ \exists x_0, n_k : \ x_{n_k} \to_{k\to+\infty} x_0$.

Fissato $\epsilon>0$, sia $f_{n_\epsilon}(x_0) \le \epsilon$. $\quad$ Siccome f_{n_ϵ} é continua in $x_0 \in [a,b]$,

$$\exists \delta_\epsilon : \quad f_{n_\epsilon}(x) \ \le \ f_{n_\epsilon}(x_0) \ + \ \epsilon \ \le \ 2\epsilon \quad \forall x \in [a,b] \cap [x_0-\delta_\epsilon, x_0+\delta_\epsilon]$$

Quindi, per $n_k > n_\epsilon$ tale che $x_{n_k} \in \cap[x_0-\delta_\epsilon, x_0+\delta_\epsilon]$, risulta

$$m_{n_k} \ = \ f_{n_k}(x_{n_k}) \ \le \ f_{n_\epsilon}(x_{n_k}) \ \le \ 2\epsilon \quad \text{e quindi} \quad m_{n_k} \to_{k\to+\infty} 0$$

e quindi, essendo m_n monotona, $m_n \to_{n\to+\infty} 0$.

7 (Teorema di Ascoli-Arzela')

Siano $\quad f_n \in C^1([a,b]) \quad$ tali che $\qquad \sup\limits_{x\in[a,b], n\in\mathbf{N}} |f_n(x)| + |f_n'(x)| \ := \ M \ < \ +\infty$

Allora $\quad \exists\, n_k : \quad f_{n_k}$ converge uniformemente in $[a,b]$.

Schema di dimostrazione

(i) (**diagonalizzazione di Cantor**) Sia $D := \{x_j : \ j \in \mathbf{N}\}$ denso in $[a, b]$.

Allora $\exists \ \alpha_j \in \mathbf{R}, \ n_k < n_{k+1} : \quad f_{n_k}(x_j) \to_{k\to+\infty} \alpha_j \quad \forall j$

Infatti $|f_n(x_1)| \le M \ \Rightarrow \ \exists \alpha_1, \ \phi_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strettamente crescente tale che

$$|f_{\phi_1(k)}(x_1) \ - \ \alpha_1| \ \le \frac{1}{k} \quad \forall k.$$

Ugualmente, $\exists \phi_2, \ \alpha_2 : \quad |f_{\phi_1(\phi_2(k))}(x_2) \ - \ \alpha_2| \ \le \ \frac{1}{k} \quad \forall k.$ Notiamo che si ha anche

$$|f_{\phi_1(\phi_2(k))}(x_1) - \alpha_1| \ \le \ \frac{1}{\phi_2(k)} \le \frac{1}{k}.$$

Iterando, troviamo al passo j:

$$\exists \ \phi_j, \ \alpha_j : \qquad |f_{\phi_1\circ\ldots\circ\phi_j(k)} \ (x_i) \ - \ \alpha_i| \ \le \ \frac{1}{k} \quad \forall k, \ \ i \le j$$

Basta ora prendere $n_k \ = \ (\phi_1 \circ \ldots \circ \phi_k)(k)$

(ii) Sia $f(x_j) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x_j)$. Si ha che

$$|f(x_i) - f(x_j)| \ \le \ M|x_i - x_j| \ \forall i, j$$

e quindi f si prolunga ad una $\overline{f}$ Lipschitziana (di costante M) in tutto $[a, b]$.

Infatti

$$|f(x_i) - f(x_j)| \le$$
$$\le \ |f(x_i) - f_{n_k}(x_i)| \ + \ |f_{n_k}(x_i) - f_{n_k}(x_j)| \ + \ |f_{n_k}(x_j) - f(x_j)| \ \le$$
$$\le \ M|x_i - x_j| \ + \ |f(x_i) - f_{n_k}(x_i)| \ + \ |f_{n_k}(x_j) - f(x_j)|, \qquad \forall i, j$$

Basta ora mandare k all'infinito.

(iii) $f_{n_k} \to_{k\to+\infty} \overline{f}$ uniformemente in $[a, b]$.

Infatti, fissato $\epsilon > 0$, siano $N \ \ge \frac{b-a}{\epsilon}$, $I_j \ := \ [a + (j-1)\frac{b-a}{N}, a + j\frac{b-a}{N}]$, $j = 1, \ldots, N$. Se $x \in [a, b]$, allora $x \in I_j$ per qualche j. Sia $x_j \in D \cap I_j$. Si ha

$$|f_{n_k}(x) \ - \ \overline{f}(x)| \ \le \ |f_{n_k}(x) \ - \ f_{n_k}(x_j)| \ + \ |f_{n_k}(x_j) \ - \ \overline{f}(x_j)| \ + \ |f(x_j) \ - \ \overline{f}(x)| \ \le$$
$$\le \ 2M\,\frac{b-a}{N} \ + \ |f_{n_k}(x_j) \ - \ \overline{f}(x)|$$

e quindi, da $k \ge k_{\epsilon,x_1,\ldots,x_N} \ \Rightarrow \ |f_{n_k}(x_j) - \overline{f}(x)| \le \epsilon$, segue $|f_{n_k}(x) - \overline{f}(x)| \le 2\epsilon$.

SERIE DI FUNZIONI

Date $a_n(x), x \in E$, la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ **converge puntualmente in** E se la successione delle somme parziali $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_n(x)$ converge puntualmente in E e si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \ := \ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_n(x)$$

SERIE DI POTENZE

Dati $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, \quad x, x_0 \in \mathbf{R}$, la serie di funzioni

$$(SP) \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n$$

si chiama serie di potenze in $x - x_0$. Nel seguito, sostituendo eventualmente $x - x_0$ con x, supporremo $x_0 = 0$.

Le serie di potenze hanno una peculiare proprietá: l'insieme in cui converge una serie di potenze é necessariamente un intervallo.Ció segue subito dal criterio della radice:

$$\limsup_n \, (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} \ < \ 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \, x^n| \ < \ +\infty$$

$$\limsup_n \, (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} \ > \ 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \, x^n| \ = \ +\infty$$

Dunque

Proposizione. Se $r \ := \ (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} \quad (\frac{1}{0} := +\infty, \ \ \frac{1}{\infty} := 0)$ allora

$$|x| \ < \ r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \, x^n| \ < \ +\infty, \qquad |x| \ > \ r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \, x^n| \ = \ +\infty$$

Raggio di convergenza. $\qquad r \ = \ (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$

si chiama raggio di convergenza e $\{|x| < r\}$ intervallo di convergenza.

NOTA. Se esiste $\lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ allora $r = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$.

Infatti $\quad |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \to r \quad \Rightarrow \quad |a_n|^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{r}$

ESEMPI (di serie di potenze).

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 0$. Infatti $(n^n)^{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = +\infty$. Infatti $\frac{(n+1)!}{n!} \to +\infty$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^\alpha\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 1$. Infatti $(n^\alpha)^{\frac{1}{n}} = (n^{\frac{1}{n}})^\alpha \to 1$

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = \frac{1}{e}$. Infatti,

$$\frac{n^n}{n!}\,\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = (\frac{n}{n+1})^n \to \frac{1}{e}.$$

NOTA. Dagli esempi precedenti si vede che una serie di potenze puó avere qualsiasi comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza. In 3.

se $\alpha \geq 0$ la serie diverge in $x = 1$ mentre non converge né diverge in $x = -1$

Se $\alpha \in [-1, 0)$, la serie diverge in $x = 1$ e converge in $x = -1$

se $\alpha < -1$ la serie converge assolutamente sia in $x = 1$ che in $x = -1$.

In 4., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\,\frac{1}{e^n} = +\infty$ perché, dalla formula di Stirling, $\frac{n^n}{n!\, e^n} = \frac{1}{\sqrt{2n\pi} + \circ(\sqrt{n})}$.
Infine, la serie converge in $x = -\frac{1}{e}$ per il criterio di Leibnitz.

Serie uniformemente convergenti. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ si dice uniformemente convergente in E se $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_n(x)$ converge uniformemente in E

Criterio di Cauchy . $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge uniformemente in E sse

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon :\ n \geq n_\epsilon, p \in \mathbf{N} \ \Rightarrow\ \sup_{x \in E} |\sum_{j=n}^{n+p} a_j(x)| \leq \epsilon$$

Serie totalmente convergenti. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é totalmente convergente in E se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in E} |a_n(x)| < +\infty$$

ESEMPI di serie uniformemente convergenti ma non totalmente convergenti.

1. Se $a_n(x) \equiv \frac{(-1)^n}{n}$, é $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge, ovviamente uniformemente , ma non totalmente convergente, perché é assolutamente divergente.).

2. sia $f \in C(\mathbf{R})$, nulla fuori di $(0, 1)$, $a_n(x) := \frac{1}{n} f(x - n)$.

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(x-n)$ converge alla funzione $S(x)$ che vale $\frac{1}{n} f(x-n)$ in $[n, n + 1]$ e zero se $x \leq 0$. Inoltre la convergenza é uniforme in $\mathbf{R}$, perché $|S(x) - S_n(x)| = |\sum_{j>n} \frac{1}{j} f(x - j)| \leq \frac{1}{n+1} \sup |f| \to 0$.

La convergenza peró non é totale, perché $\sup|a_n|\frac{1}{n}\sup|f|$.

Proposizione : la totale convergenza implica l'uniforme convergenza:

$\sum_{n=1}^{\infty}\sup\limits_{x\in E}|a_n(x)|<+\infty \Rightarrow |\sum\limits_{j=n}^{n+p}a_j(x)|\leq \sum\limits_{j=n}^{n+p}|a_j(x)|\leq \sum\limits_{j=n}^{n+p}\sup\limits_{x\in E}|a_n(x)|\leq \epsilon\forall x\in E.$

UN ESEMPIO IMPORTANTE: una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ avente raggio di convergenza r converge totalmente in $[-\delta,\delta]$, $\forall\delta<r$.

Infatti $\sum_0^{\infty}|a_n|\delta^n<+\infty$ e $\sup\limits_{|x|\leq\delta}|a_nx^n|=|a_n|\delta^n$.

Teorema .

(i) se $a_n(x)$ sono funzioni continue in E e la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ é uniformemente convergente in E, allora $S(x):=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ é continua in E.

(ii) se a_n sono funzioni integrabili in $[a,b]$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ é uniformemente convergente in $[a,b]$, allora $S(x):=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ é integrabile in $[a,b]$ e

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)dx$$

(iii) se $a_n\in C^1(I)$, se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ converge in qualche punto di I e la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x)$ converge uniformemente in I, allora

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{da_n}{dx}(x)$$

La somma di una serie di potenze é una funzione C^{∞}.

Le $a_n(x):=a_nx^n$ sono funzioni C^{∞} e la serie delle derivate k-esime

$$\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\dots(n-k+1)a_nx^{n-k}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!}{j!}a_{j+k}x^j$$

é anch'essa serie di potenze ed il suo raggio di convergenza é

$$(\limsup_n|n(n-1)\dots(n-k+1)a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}=(\limsup_n|a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$$

UN ESEMPIO: $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{d^k}{dx^k}(\frac{1}{1-x}) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!}{j!}x^j, \quad \forall x\in(-1,1).$