AM2: Tracce delle lezioni-IV settimana

INTEGRALI E SERIE

Sia f integrabile in $[1,x)\ \ \forall\, x\geq 1$. Dalla additivitá dell'integrale segue:

$$\int_1^{+\infty}|f| = \lim_{n\to+\infty}\int_1^{n+1}|f| = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_j^{j+1}|f| = \sum_{j=1}^{+\infty}\int_j^{j+1}|f|$$

Analogamente, f integrabile su $[1,+\infty)\quad\Rightarrow\quad \sum_{j=1}^{+\infty}\int_j^{j+1} f = \int_1^{+\infty} f$. Ma

$\exists\ \sum_{j=1}^{+\infty}\int_j^{j+1} f$ non implica $\exists\ \lim_{x\to+\infty}\int_1^x f$. Ad esempio

$\int_j^{j+1}\sin(2\pi t)\,dt = \int_{2j\pi}^{2(j+1)\pi}\sin s\,ds = 0\ \ \forall j$, ma $\int_1^{+\infty}\sin(2\pi t)\,dt$ non esiste!

Il caso di funzioni non negative e decrescenti

Se $f\geq 0$ é non crescente in $[1,+\infty)$, allora

$$(*)\qquad f(j+1)\ \leq\ \int_j^{j+1} f\ \leq\ f(j),\quad \forall j\in\mathbf{N}$$

e quindi

$$\sum_j f(j)\ <\ +\infty\quad\Leftrightarrow\quad\int_1^{+\infty} f\ <\ +\infty$$

ESEMPI

1. Sia $f(x)=\frac{1}{x^r}$. Siccome $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^r}dx<+\infty$ se e solo se $r>1$ la serie (armonica generalizzata) $\sum_n\frac{1}{n^r}$ converge se e solo se $r>1$.

2. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\log x)^r}<+\infty$ se e solo se $r>1$, e quindi la serie $\sum_n\frac{1}{n(\log n)^r}$ converge se e solo se $r>1$.

La diseguaglianza $(*)$ puó essere utilizzata per stimare la rapiditá con cui diverge la somma parziale di una serie divergente.
Sia f non negativa e decrescente a zero. Intanto,

$$(*)\quad\Rightarrow\quad 0\ \leq\ f(n)-\int_n^{n+1} f\ \leq\ f(n)-f(n+1)\quad\forall n\quad\Rightarrow$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\left(f(n)-\int_n^{n+1} f\right) \le \sum_{n=N}^{+\infty}\left(f(n)-f(n+1)\right) = f(N) \qquad \forall N$$

Quindi, da $\quad f(1)+\ldots+f(n) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \sum_{j=1}^{n}[f(j)-\int_j^{j+1} f\,],\quad$ segue allora

$$(**)\qquad f(1)+\ldots+f(n) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \sum_{j=1}^{+\infty}\left(f(j)-\int_j^{j+1} f\right) + O(f(n))$$

ESEMPI

1. $\qquad \exists\,\gamma: \qquad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} = \log(n+1)+\gamma+O(\frac{1}{n})$

($\gamma := \sum_1^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)$ si chiama **costante di Eulero-Mascheroni**)

2. $\qquad \exists c>0: \quad \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{n\log n} = \log[\log(n+1)] + c + O(\frac{1}{n\log n})$.

3. $\qquad \exists\, b>0: \qquad n\,! = \frac{n^{\,n+\frac{1}{2}}}{e^n}\left(b+O(\frac{1}{n})\right)$

(Si puó provare che $\quad b=\sqrt{2\pi}$: $\qquad$ é questa la **formula di Stirling**)

1. Sia $\;f(x)=\frac{1}{x}$. Da $(**)$ otteniamo

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} = f(1)+\ldots+f(n) = \int_1^{n+1}\frac{dx}{x} + \sum_1^{+\infty}\left(\frac{1}{j}-\int_j^{j+1}\frac{dx}{x}\right) + O(\frac{1}{n})$$

$$= \log(n+1) + \sum_1^{+\infty}\left(\frac{1}{j}-\log\frac{j+1}{j}\right) + O(\frac{1}{n})$$

.

2. Analogo ad 1., con $f(x)=\frac{1}{x\log x}$.

3. $\qquad \log n! = \log 2+\ldots+\log n =$

$$(\log 2-\int_1^2\log t dt)+\ldots+(\log n-\int_{n-1}^{n}\log t dt)+\int_1^n\log t dt = f(1)+\ldots+f(n-1)+n\log n-n+1$$

ove $\quad f(x) := \log(x+1)-\int_x^{x+1}\log t\,dt = 1-\log(1+\frac{1}{x})^x \;\rightarrow_{x\to+\infty} 0 \quad$ é decrescente:

$$\exists\,\xi\in[x,x+1]: \quad f'(x) := \frac{1}{1+x} - [\log(x+1)-\log x] = \frac{1}{1+x}-\frac{1}{\xi} \le 0$$

Per x grande, dalla formula di Taylor si ottiene

$$f(x) \;=\; 1 \;-\; x \,\left[\frac{1}{x} \;-\; \frac{1}{2x^2} \;+\; \frac{1}{3x^3} \;+\; O(\frac{1}{x^4})\right] \;=\; \frac{1}{2x} \;-\; \frac{1}{3x^2} \;+\; O(\frac{1}{x^3})$$

e quindi, posto $g(x) \;:=\; f(x) \;-\; \frac{1}{2x}$ é $|g(x)| \;\leq\; \frac{1}{x^2}$ per x grande e quindi $\int_1^{+\infty} g$ converge. Quindi, da $(**)$:

$$f(1) \;+\; \ldots \;+\; f(n-1) \;=$$

$$= \frac{1}{2}\log n \;+\; \int_1^{+\infty} g(x)dx \;+\; \sum_1^{+\infty}\left(f(j) - \int_j^{j+1} f\right) \;+\; O(\frac{1}{n}) \;=$$

$$= \frac{1}{2}\log n \;+\; \sum_1^{+\infty}\left[f(j) - \int_j^{j+1} (\,f - g\,)\right] + \;O(\frac{1}{n}) \;=$$

$$\frac{1}{2}\log n \;+\; \sum_1^{+\infty}\left[1 \;-\; (\,j \;+\; \frac{1}{2})\,\log\frac{j+1}{j}\right] \;+\; O(\frac{1}{n})$$

e quindi $$\log n! = (n+\frac{1}{2})\log n - n + 1 + \sum_1^{+\infty}\left[1 \;-\; (\,j \;+\; \frac{1}{2})\,\log\frac{j+1}{j}\right] + O(\frac{1}{n})$$

e quindi $$n! = \frac{n^{\,n+\frac{1}{2}}}{e^n}\;\;(b+O(\frac{1}{n})), \qquad \log b := 1+\sum_1^{+\infty}\left[1 \;-\; (\,n \;+\; \frac{1}{2})\,\log\frac{n+1}{n}\right]$$

Infine, la diseguaglianza $(*)$ puó essere utilizzata per l'analisi asintotica del resto n-esimo di una serie convergente. Sia f integrabile:

$$f(j+1) \leq \int_j^{j+1} f \leq f(j), \forall j \;\;\Rightarrow\;\; 0 \leq \left[\sum_{j\geq n} f(j)\right] - \int_n^{+\infty} f \leq \sum_{j\geq n} f(j) - f(j+1) = f(n)$$

Se accade che $f(n) \;=\; \circ(\int_n^{+\infty} f)$ per n tendente all'infinito, allora

$$\sum_{j\geq n} f(j) \;=\; \int_n^{+\infty} f \;+\; \circ(\int_n^{+\infty} f)$$

ESEMPIO. Sia $r > 1$. Allora $\sum_{j\geq n} \frac{1}{j^r} \;=\; \frac{1}{(r-1)n^{r-1}} \;+\; \circ(\frac{1}{n^{r-1}})$.

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

CONVERGENZA PUNTUALE. Siano $f_n,\ n \in \mathbf{N}$ funzioni definite su di un insieme E.

Se esiste finito $\lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall\, x \in E$, diremo che la successione di funzioni f_n **converge puntualmente** (o semplicemente) in E alla funzione

$$f(x) \ := \ \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in E.$$

ESEMPI. Se $f_n(x) \equiv a_n, \quad x \in E$, le f_n convergono se e solo se a_n converge e $\lim_n f_n(x) \equiv \lim a_n$.

Se $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$, allora f_n converge alla funzione che vale zero in $[0,1)$ e vale 1 in $x = 1$.

In generale le proprietá delle f_n non si conservano nel limite puntuale. Nell'esempio $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$ le f_n sono continue, ma il loro limite non lo é.

CONVERGENZA UNIFORME. Se f_n converge puntualmente in E ad f, si dice che la convergenza é uniforme (in E) se

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to\infty} 0$$

ESEMPI.

1. La successione $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a zero in $[0,a]$ se $0 < a < 1$, ma la convergenza non é uniforme in $[0,1)$. Infatti

$$\sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n \to 0 \quad \text{mentre} \quad \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$$

2. $f_n(x) := \min\{n, \frac{1}{x}\} \to_{n\to\infty} 0,\ \forall x \in (0,1]$, ma la convergenza non é uniforme in $(0,1]$. Infatti $\sup_{(0,1]} \frac{1}{x} = +\infty$ e, chiaramente,

$$\sup_{x\in E} |f_n(x)| < +\infty, \quad f_n \to_{n\to\infty} f \quad \text{uniformemente in E} \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in E} |f(x)| < +\infty$$

3. (**Traslazioni**). Sia f una funzione (non identicamente nulla) nulla fuori di $(0,1)$. Siano $f_n(x) \ := \ f(x-n)$ le traslate di f. Allora $f_n(x) \to_{n\to\infty} 0,\ \ \forall x \in \mathbf{R}$, ma la convergenza non é uniforme, giacché $\sup_{\mathbf{R}} f_n = \sup_{\mathbf{R}} f$.

4. (**Cambi di scala**). Sia f una funzione (non identicamente nulla) nulla fuori di $(0,1)$. Siano $f_n(x) \ := \ f(nx)$. Allora $f_n(x) \to_{n\to\infty} 0,\ \ \forall x \in \mathbf{R}$, ma

la convergenza non é uniforme, giacché $\sup_{\mathbf{R}} f_n = \sup_{\mathbf{R}} f$.

Il criterio di Cauchy.

f_n é uniformemente convergente in E se e solo f_n é $''$ **Cauchy uniforme** $''$:

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon :\ \ n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

Dimostrazione.

NECESSITÁ: $f_n \to f$ uniformemente in E $\Rightarrow$
$\exists n_\epsilon :\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon\ \forall x \in E$ se $n, m \geq n_\epsilon$.

SUFFICENZA: intanto, per ogni fissato x in E, la successione $n \to f_n(x)$ é di Cauchy, e quindi $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste finito per ogni x in E.

Poi, dall'ipotesi, fissato $\epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| \ \leq\ |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \ \leq\ \epsilon + |f_m(x) - f(x)| \ \ \forall x \in E$$

se $n, m \geq n_\epsilon$. Mandando m all'infinito in $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_m(x) - f(x)|\ \forall x \in E$ si ottiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon\ \ \forall x \in E$, cioé f_n converge uniformemente ad f.

Teorema 1. Sia f_n una successione di funzioni uniformemente convergente in un insieme E . Se le f_n sono continue in $x_0 \in E$ allora $f := \lim_n f_n$ é continua in x_0.

Dimostrazione. Fissato $\epsilon > 0$ siano n_ϵ, $\delta_\epsilon > 0$ tali che $|f_{n_\epsilon}(x) - f(x)| \leq \epsilon$, $\forall x \in E$, $|f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x_0)| \leq \epsilon\ \forall x \in E, |x - x_0| \leq \delta_\epsilon$. Allora

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2\epsilon,\ \ \forall x \in E, |x - x_0| \leq \delta_\epsilon.$$

NOTA. Se la convergenza non é uniforme il limite puó non essere continuo. Controesempio: $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$.

Teorema 2. Sia f_n una successione di funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se f_n converge uniformemente ad f in $[a, b]$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \ =\ \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Dimostrazione. Infatti, f é continua in $[a, b]$ e

$$|\int_a^b f_n \ -\ \int_a^b f| \ \leq\ \int_a^b |f_n - f| \ \leq\ (b - a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \ \to_{n\to\infty} 0$$

NOTA.

(i) Le f_n si possono supporre anche solo integrabili: dal teorema di Vitali segue infatti che ogni f_n é continua al di fuori di un insieme D_n di misura nulla e quindi, per il Teorema 2, f é continua al di fuori di $\cup_n D_n$, che é pure di misura nulla, e quindi f é integrabile.

(ii) Se la convergenza delle f_n non é uniforme, il limite puó non essere integrabile: se $\mathbf{Q} = \{q_1, \ldots, q_n, \ldots\}$ e $f_n = \chi_{\{q_1,\ldots,q_n\}}$, f_n é integrabile in $[0,1]$, ma $\chi_{\mathbf{Q}}(x) = \lim_n f_n(x)$ non lo é.

(iii) Se la convergenza delle f_n non é uniforme, puó accadere che $f(x) = \lim_n f_n(x)$ sia integrabile ma $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$. Ad esempio, $f_n(x) = nf(nx)$, $x \in [0,1]$, $f(x) := \frac{x}{1+x^4}$ converge puntualmente a zero mentre $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n f \to \int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^4}$.

(iv) Il Teorema 1 non si estende agli integrali impropri. Ad esempio, $f_n(x) = \frac{1}{x}\chi[1,n]$ sono integrabili e convergono alla funzione $f(x) = \frac{1}{x}\chi[1,+\infty)$ che non é integrabile.

Ancora di piú, se f é limitata ed integrabile su $\mathbf{R}$ con $\int_{\mathbf{R}} f \neq 0$, $f_n(x) = \frac{1}{n} f(\frac{x}{n})$ converge uniformemente a zero (il limite é quindi integrabile con integrale zero), ma $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} f(\frac{x}{n})dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f \neq 0$.

Teorema 3. Siano $f_n \in C^1(I)$, I intervallo aperto. Se $f_n(x_0)$ converge per un $x_0 \in I$ e f'_n converge uniformemente ad una funzione g in I, allora f_n converge in I ad una $f \in C^1(I)$ con $f' = g$.

Dimostrazione. Usando le ipotesi, il TFC ed il Teorema 2, vediamo che:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^x f'_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)dt$$

NOTA. La convergenza uniforme delle f'_n é essenziale.

Controesempio: $f_n(x) := |x|^{1+\frac{1}{n}}$, $x \in (-1,1)$.

Si ha $f'_n(x) = (1+\frac{1}{n})\frac{x}{|x|}|x|^{\frac{1}{n}} \to_{n\to\infty} \frac{x}{|x|}$, per $x \neq 0$ e $f'_n(0) \to_n 0$ (la convergenza non é uniforme!) e $f_n(x) \to |x|$, $\forall\ x \in (-1,1)$, che non é derivabile in $x = 0$.