

AM2: Tracce delle lezioni-III settimana

Integrali impropri: esercizi

Discutere la convergenza dei seguenti integrali ed eventualmente calcolarli.

1. $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}} dx$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+x^3} dx$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x^3} dx$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}} dx$
5. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$
6. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx$
7. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos^2 x dx$
8. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^3 x}$
9. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$
10. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$

Gli integrali **1-7** sono assolutamente convergenti: gli integrandi sono continui nei rispettivi intervalli di integrazione e vanno a zero per x tendente all'infinito, in 1-4 come $\frac{1}{x^p}$, con, rispettivamente, $p = 2, 3, 3, 2$, mentre in 5-6-7 decadono in modo esponenziale. Effettuiamo ora il calcolo.

1. $\int_2^M \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}} dx = - \int_2^M \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2-3}} \right) dx = - \left[\frac{1}{\sqrt{M^2-3}} - 1 \right] \rightarrow_{M \rightarrow +\infty} 1.$
2. $\int_1^M \frac{1}{x+x^3} dx = \int_1^M \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} dx = \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^M \rightarrow_{M \rightarrow +\infty} \log \sqrt{2}.$
3. $\int_1^M \frac{1}{x^2+x^3} dx = \int_1^M \frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{x^2} dx = \left[\log \frac{1+x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^M \rightarrow_{M \rightarrow +\infty} 1 - \log 2.$
4. Posto $4x^2 + 1 = t$, si ha $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}} dx = \frac{1}{8} \int_1^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{4}.$
5. Siccome l'integrale é convergente, basta calcolare, per esempio,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{2k\pi} e^{-x} \sin x dx$$

Integrando due volte per parti, troviamo

$$\int_0^{2k\pi} e^{-x} \sin x dx = \int_0^{2k\pi} e^{-x} \cos x dx = - \int_0^{2k\pi} e^{-x} \sin x dx + (1 - e^{-2k\pi})$$

e quindi

$$\int_0^{2k\pi} e^{-x} \sin x dx = \frac{1 + e^{-2k\pi}}{2} \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

6-7. Intanto, $1 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x + \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos^2 x dx$.
 Poi, integrando due volte per parti, troviamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(2x) dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(2x) dx$$

Siccome $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$ deduciamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx = \frac{2}{5} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos^2 x dx = \frac{3}{5}$$

In **8-10 il criterio asintotico é insufficiente** e occorre argomentare direttamente:

8. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^3 x} = -\frac{1}{2} \log^{-2} x \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2 \log^2 2}$

9. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = +\infty$

10. Integrando per parti,

$$\int_{\pi}^{k\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_{\pi}^{k\pi} \frac{1}{2x^2} (x - \sin x \cos x) dx = \int_{\pi}^{k\pi} \frac{dx}{2x} - \int_{\pi}^{k\pi} \frac{\sin 2x}{4x^2} dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$$

perché $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left| \frac{\sin x \cos x}{2x^2} \right| dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx < +\infty$.

Od anche: $\int_{\pi}^{k\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\pi} \int_{\pi}^{k\pi} \sin^2 x dx = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$

Discutere ora la **convergenza/assoluta convergenza** dei seguenti integrali:

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1 - 4 \sin x}{x^3 + \sqrt{x}} dx$, 2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 3. $\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha dx$,

4. $\int_0^{+\infty} \sin(e^x) dx$, 5. $\int_0^{+\infty} x \sin x^4 dx$ 6. $\int_1^{+\infty} \sin(\log x) dx$

1. $\left| \frac{1-4 \sin x}{x^3 + \sqrt{x}} \right| \leq \frac{5}{x^3} \Rightarrow \int_2^{+\infty} \left| \frac{1-4 \sin x}{x^3 + \sqrt{x}} \right| dx < +\infty$ per il criterio del confronto.

2. Se $\alpha > 1$, l'integrale é assolutamente convergente per il criterio del confronto.

Sia $0 < \alpha \leq 1$. Integrando per parti,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = -\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx - \frac{\cos M}{M^\alpha} \rightarrow_{M \rightarrow +\infty} -\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx$$

ove l'ultimo integrale converge perché $\alpha + 1 > 1$. Tuttavia la convergenza non é assoluta: $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \geq \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$.

Se $\alpha = 0$, l'integrale non converge. Se $\alpha < 0$, $\beta := -\alpha > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^\beta \sin x dx &\geq (2k\pi)^\beta \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x dx = 2(2k\pi)^\beta \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} +\infty \\ \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} x^\beta \sin x dx &\leq [(2k-1)\pi]^\beta \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \sin x dx = -2[(2k-1)\pi]^\beta \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} -\infty \end{aligned}$$

Dunque, se $\alpha < 0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ non esiste.

3. Per $\alpha = 0$ l'integrale non converge. Per $\alpha > 0$, posto $x^\alpha = t$, si ottiene

$$\int_0^M \sin x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha} \int_1^M \frac{\sin t}{t^{1-\frac{1}{\alpha}}} dt$$

che, come visto, converge (ma non assolutamente!) se e solo se $\alpha > 1$. Infine, se $\alpha < 0$, $\sin x^\alpha$ si comporta come x^α per x grande, e quindi l'integrale converge (infatti assolutamente) se e solo se $\alpha < -1$.

4. Posto $e^x = t$, si ottiene $\int_0^{+\infty} \sin(e^x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ che converge (ma non assolutamente!).

5. Posto $x^4 = t$, si ha

$$\int_0^{+\infty} x \sin x^4 dx = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

che, come visto, converge (ma non assolutamente!).

6. Posto $\log x = t$, si ottiene $\int_1^M \sin(\log x) dx = \int_0^{\log M} e^t \sin t dt$. Dopo due integrazioni per parti si trova

$$\int_0^{2k\pi} e^t \sin t dt = \frac{1 - e^{2k\pi}}{2} \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} -\infty$$

INTEGRALI IMPROPRI

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI NON LIMITATE

Definizione Sia f integrabile in $[a, x] \quad \forall x < b, \sup_{[a,b]} |f| = +\infty$. Se $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f$ esiste

$$\int_a^b f := \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f$$

si dice **integrale improprio** (o in senso generalizzato) di f su $[a, b]$.

Se tale limite é finito, f si dice **a integrale convergente** (o **integrabile in senso improprio o generalizzato**) su $[a, b]$

Definizione analoga se f , integrabile in $[x, b], \forall x > a$, é non limitata attorno ad a .

NOTA. In generale, $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f$ non esisterá. Ad esempio, se $x \in [-\frac{2}{\pi}, 0)$

$$\int_{-\frac{2}{\pi}}^x \frac{\sin \frac{1}{t}}{t^2} dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{1}{x}} \sin \tau d\tau = \cos \frac{1}{x}, \quad \text{non ha limite per } x \text{ tendente a } 0^-.$$

UN ESEMPIO FONDAMENTALE : $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ é convergente $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Infatti, $\alpha \neq 1 \Rightarrow \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(1 - x^{1-\alpha}) \rightarrow_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-\alpha}$ se $\alpha < 1$ mentre $\frac{1}{1-\alpha}(1 - x^{1-\alpha}) \rightarrow +\infty$ se $\alpha > 1$. Infine, per $\alpha = 1$ si ha $\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\log x \rightarrow_{x \rightarrow 0^-} +\infty$.

Definizione Sia $x_0 \in (a, b)$, f integrabile in $[a, x_0 - \delta], [x_0 + \delta, b], \forall \delta > 0$ piccolo e $\sup_{[a,b]} |f| = +\infty$. Diremo che f é **integrabile (in senso improprio) in $[a, b]$** se e solo se f é integrabile (in senso improprio) in $[a, x_0]$ ed in $[x_0, b]$ e in tal caso

$$\int_a^b f := \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f$$

sará l'**integrale improprio** di f in $[a, b]$.

Diremo anche che f ha in x_0 una **singularitá integrabile**.

Ovvia la definizione di $\int_a^b f$ se f ha in $[a, b]$ solo singularitá integrabili.

ESEMPIO. x_0 é una singularitá integrabile per $f(x) = \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}$ se e solo se $\alpha < 1$. Infatti, posto $t = x - x_0$, si ha

$$\int_{x_0+\delta}^{x_0+1} \frac{dx}{|x-x_0|^\alpha} = \int_\delta^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

In particolare, le singolarità delle funzioni razionali sono non integrabili.

Definizione Se $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, è integrabile (anche solo in senso improprio) in ogni intervallo limitato, diremo che f è **integrabile in senso generalizzato su \mathbf{R}** se esistono $\int_0^{+\infty} f := \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f$ e $\int_{-\infty}^0 f := \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 f$ e scriveremo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f := \int_0^{+\infty} f + \int_{-\infty}^0 f$$

Se I è un intervallo illimitato, aperto o chiuso, la definizione di integrabilità in senso improprio su I si dá in modo analogo.

Esempi.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.
2. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \pi$. Infatti, posto $t = s^2$, $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1+t)}} = 2 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{ds}{s(1+s^2)} = 2(\arctan 1 - \arctan x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi}{2}$ e $2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{ds}{s(1+s^2)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

Definizione di assoluta integrabilità. Se $|f|$ è integrabile (in senso improprio) sull'intervallo I , f si dice assolutamente integrabile su I .

NOTA Se f è integrabile in ogni $[a, b] \subset I$, I intervallo aperto, limitato od illimitato, è

$$\int_{\inf I}^{\sup I} |f| = \sup_{[a,b] \subset I} \int_a^b |f|$$

e quindi $\int_{\inf I}^{\sup I} |f|$ esiste sempre, finito od infinito. L'assoluta integrabilità potrà scriversi nella forma

$$\int_{\inf I}^{\sup I} |f| < +\infty$$

ESEMPIO : $\int_{-1}^1 \frac{dt}{|t^\alpha|} < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 1$

Condizioni di integrabilità.

Criterio del Confronto Siano f, g integrabili in $[a, x] \forall x < b$. Allora

(i) $|f(x)| \leq |g(x)| \forall x \in [a, b), \int_a^b |g| < +\infty \Rightarrow \int_a^b |f| < +\infty$

$$(ii) \quad |g| \leq |f| \quad \forall x \in [a, b), \quad \int_a^b |g| = +\infty \Rightarrow \int_a^b |f| = +\infty$$

$$\text{Infatti: (i): } \int_a^x |f| \leq \int_a^b |g| \quad \forall x \in [a, b) \quad (ii): \quad \int_a^x |f| \geq \int_a^x |g| \rightarrow_{x \rightarrow b^-} +\infty$$

Corollario .

$$(i) \quad \exists M > 0, \alpha > 1: \quad 0 \leq |f|(x) \leq \frac{M}{|x-b|^\alpha} \quad \forall x \in [a, b) \Rightarrow \int_a^b |f| < +\infty$$

$$(ii) \quad \exists M > 0: \quad |f|(x) \geq \frac{M}{|x-b|}, \quad \forall x \in [a, b) \Rightarrow \int_a^b |f| = +\infty$$

Integrabilità e comportamento asintotico.

$$(i) \quad \exists \alpha > 1: \quad |x-b|^\alpha |f(x)| \rightarrow_{x \rightarrow b^-} c < +\infty \Rightarrow \int_a^b |f| < +\infty$$

$$(ii) \quad |x-b| |f(x)| \rightarrow_{x \rightarrow b^-} c > 0 \Rightarrow \int_a^b |f| = +\infty$$

I criteri sopra esposti sono infatti **criteri di assoluta integrabilità**.

La rilevanza dei criteri di confronto é descritta in particolare dal fatto seguente

L'assoluta integrabilità implica l' integrabilità

$$\int_a^b |f| < +\infty \Rightarrow \exists \int_a^b f$$

Questo fatto é a sua volta una conseguenza del

Criterio di Cauchy. Sia f integrabile in $[a, x] \quad \forall x < b$. Allora

$$\exists \int_a^b f \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon: \quad x_\epsilon \leq x_1 < x_2 < b \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \leq \epsilon)$$

che altro non é che la condizione di Cauchy perché esista finito il limite, per x tendente a b^- , di $F(x) := \int_a^x f$. Infatti $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f$.

Ed allora, se $\int_a^x |f| < +\infty$, e quindi $\int_a^x |f|$ soddisfa la condizione di Cauchy, anche $\int_a^x f$ soddisfa la condizione di Cauchy, dato che $\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f|$.

NOTA. Una f può essere integrabile senza essere assolutamente integrabile.

Sia, ad esempio, $f(t) = \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t}$, $t \in (0, 1]$. Posto $\frac{1}{t} = s$, troviamo

$$\forall x \in (0, 1): \quad \int_x^1 \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\sin s}{s} ds \rightarrow_{x \rightarrow 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{\sin s}{s} ds$$

Dunque l'integrale converge, ma $\int_0^1 \left| \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} \right| dt = \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin s}{s} \right| ds = +\infty$.

Esercizi. Discutere la convergenza dei seguenti integrali, ed eventualmente calcolarli.

$$1. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad 2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{|1-x^2|}} dx \quad 3. \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p, q > 0$$

$$4. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \log^q x}, \quad p, q > 0 \quad 5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} \quad 6. \int_{-1}^1 \frac{\log(1+\sqrt{|x|})}{e^{\sin x} - 1} dx$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx \quad 8. \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 9. \int_0^1 x^\alpha \log^n x dx, \quad n \in \mathbf{N}$$

1. La funzione $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ha due singolarità di ordine $\frac{1}{2}$ e quindi integrabili, in $x = 1, x = -1$. Si ha: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi$

2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2-1}} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{x \cos x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} dx$ Dunque l'integrale è convergente e, per disparità, vale zero. Ma, facilmente, la convergenza non è assoluta!

3. La funzione $f(x) := x^{p-1} (1-x)^{q-1}$ è continua in $[0, 1]$ se $p, q \geq 1$.
 Se $p < 1$, f ha una singolarità in $x = 0$, che è integrabile sse $p > 0$.
 Se $q < 1$, f ha una singolarità in $x = 1$, che è integrabile sse $q > 0$.
 Dunque l'integrale converge sse $p, q > 0$.

4. La funzione $\frac{1}{x^p \log^q x}$ ha in $x = 1$ una singolarità di ordine q (infatti $\log x = x - 1 + o(|x - 1|)$ per x vicino ad 1) e quindi l'integrale diverge se $q \geq 1$.
 Sia quindi $q < 1$: in tal caso la singolarità in $x = 1$ è integrabile.
 Se $p > 1$, è $\frac{1}{x^p \log^q x} < \frac{1}{x^p}$ per $x > e$, e quindi l'integrale converge.
 Infine, $p \leq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \log^q x} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \log^q x} = \left(\frac{\log^{1-q} x}{1-q} \right) \Big|_1^{+\infty} = +\infty$.
 Dunque l'integrale converge sse $q < 1$ e $p > 1$.

5. Siccome $\cos x$ va a zero come $1 - x$ per x che tende a $\frac{\pi}{2}$, la funzione $\frac{1}{\cos x}$ ha in $x = \frac{\pi}{2}$ una singolarità non integrabile: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = +\infty$.

6. Siccome $\log(1 + \sqrt{|x|}) = \sqrt{|x|} + o(\sqrt{|x|})$, $e^{\sin x} - 1 = x + o(x)$ per x vicino a 0, la funzione $|\frac{\log(1+\sqrt{|x|})}{e^{\sin x}-1}|$ é in $x = 0$ un infinito di ordine $\frac{1}{2}$ ed é quindi assolutamente integrabile: $\int_0^1 |\frac{\log(1+\sqrt{|x|})}{e^{\sin x}-1}| dx < +\infty$.

7. Intanto $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\log(\sin x)| dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (|\log(\frac{\sin x}{x})| + |\log x|) dx < +\infty$.

Calcolo dell'integrale: posto $x = 2t$, si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2t) dt = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t) + \log(\cos t) dt$$

Ora, siccome $\cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$, posto $s = \frac{\pi}{2} - t$ otteniamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin(\frac{\pi}{2} - t)) dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin s) ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin s) ds$$

e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx$$

e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

8. La funzione $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}$ ha singolaritá integrabili in $x = 1, x = -1$ ed é quindi integrabile in $[0, 1]$. Poi, posto $x = \sin t$, si ha

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

9. $\int_0^1 x^\alpha \log^n x dx$ converge sse $\alpha > -1$.

Calcoliamo $I_n := \int_0^1 x^\alpha \log^n x dx$, $\alpha > -1$.

Intanto, integrando per parti,

$$I_1 = - \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\alpha + 1} dx = -\frac{1}{(\alpha + 1)^2}$$

Poi, di nuovo integrando per parti,

$$I_n = \int_0^1 x^{\alpha+1} \frac{\log^n x}{x} dx = -(\alpha + 1) \int_0^1 x^\alpha \frac{\log^{n+1} x}{n + 1} dx$$

e quindi

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= -\frac{n+1}{\alpha+1} I_n = (-1)^2 \frac{(n+1)n}{(\alpha+1)^2} I_{n-1} = \dots = (-1)^n \frac{(n+1)!}{(\alpha+1)^n} I_1 = \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(\alpha+1)^{n+2}} \end{aligned}$$