AM2: Tracce delle lezioni-II settimana

INTEGRAZIONE PER PARTI: FORMULE ITERATIVE

Un esempio di integrazione per parti iterata:

$\int_0^\pi \sin t e^{-at} dt = -\int_0^\pi a e^{-at} \cos t dt + (-\cos t e^{-at})|_0^\pi = -a \int_0^\pi e^{-at} \cos t dt + e^{-a\pi} + 1$

$\int_0^\pi \cos t e^{-at} \, dt \ = \ a \int_0^\pi e^{-at} \sin t \, dt \ + e^{-at} \sin t \, |_0^\pi \ = \ a \int_0^\pi e^{-at} \sin t \, dt.$

Dunque $\int_0^\pi \sin t \, e^{-at} \, dt \ = \ -a^2 \int_0^\pi \sin t \, e^{-at} \, dt \ + (e^{-a\pi} + 1)$ e quindi

$$\int_0^\pi \sin t \, e^{-at} \, dt \ = \ \frac{e^{-a\pi} + 1}{1 + a^2}$$

Stabiliamo ora alcune utili formule iterative:

1. Se $F_n(x) \ := \ \int_0^x t^n e^{-t} \, dt,$ é $F_n(x) \ = \ nF_{n-1}(x) - x^n e^{-x}$

2. Se $S_n(x) \ := \ \int_0^x \sin^n t \, dt,$ é $S_n(x) \ = \ (1 - \frac{1}{n}) S_{n-2} - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \, \cos x$

3. Se $C_n(x) \ := \ \int_0^x \cos^n t \, dt,$ é $C_n(x) = (1 - \frac{1}{n}) C_{n-2} + \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \, \sin x$

4. Se $I_n(x) \ := \ \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n},$ é $I_{n+1} \ = \ \frac{2n-1}{2n} \, I_n \ + \ \frac{x}{2n(1+x^2)^n}$

Esecuzione dei calcoli: 1. $\int_0^x t^n e^{-t} dt = n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} + x^n e^x$

2. $\int_0^x \sin^n t dt = \int_0^x \sin^{n-1} t \sin t dt = (n-1) \int_0^x \sin^{n-2} t \cos^2 t dt - \sin^{n-1} x \cos x \qquad \Rightarrow$

$$n \int_0^x \sin^n t \, dt \ = \ (n-1) \int_0^x \sin^{n-2} t \, dt \ - \ \sin^{n-1} x \cos x$$

3. Come in 2).

4. $\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} \ = \ -\int_0^x t \frac{d}{dt} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \frac{t}{(1+t^2)^n} |_0^x \ = \ 2n \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \, dt + \frac{x}{(1+x^2)^n} \ =$

$2n \int_0^x [\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}] \, dt \ + \ \frac{x}{(1+x^2)^n} \qquad \Rightarrow$

$$2n \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} \, dt \quad = \quad (2n-1) \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^n} \, dt \ + \ \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

Preso in 2) $x = \frac{\pi}{2}$, si ha $S_n \ := \ S_n(\frac{\pi}{2}) \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt \ = \ \frac{n-1}{n} \, S_{n-2}$ e quindi

$$S_{2n} \ := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, dt \ = \ \frac{\pi}{2}\, \frac{2n-1!!}{2n!!}, \qquad S_{2n+1} \ := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\, dt \ = \ \frac{2n!!}{2n+1!!}$$

ove $\ 2n-1!! \ := \ 1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1), \qquad 2n!! \ := \ 2 \times 4 \times \ldots \times 2n$
($n!!$, sopra definito per n dispari, pari, viene chiamato *semifattoriale*).

La formula di Wallis $\qquad \dfrac{\pi}{2} \ = \ [\dfrac{2n!!}{2n-1!!}]^2 \dfrac{1}{2n+1} \ + O(\dfrac{1}{n})$

Prova: $\quad 0 \ \le \ \sin x \ \le \ 1 \ \ \forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \ \Rightarrow \ S_n \ge S_{n+1} \ \Rightarrow \ \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} \ge \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} \ge 1.$

Da $\qquad \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}, \qquad \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = \frac{2n-1!!}{2n!!}\frac{2n+1!!}{2n!!}\frac{\pi}{2} \qquad$ segue

$\frac{2n+1}{2n} \ge [\frac{2n-1!!}{2n!!}]^2 (2n+1)\frac{\pi}{2} \ge 1$ $\quad$ e quindi $\quad \frac{\pi}{2}(2n+1)[\frac{2n-1!!}{2n!!}]^2 = 1 + O(\frac{1}{n})$

NOTA. Wallis $\ \Rightarrow \ \frac{2n!!}{2n-1!!} \ = \ \sqrt{(2n+1)\,[\frac{\pi}{2} \ + \ O(\frac{1}{n})]} \ = \ \sqrt{\frac{\pi(2n+1)}{2}}\,(1 + O(\frac{1}{n})) \ \ \Rightarrow$

$$\frac{2n!!}{2n+1!!} \ = \ \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \ + \ O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}), \qquad \frac{\pi}{2}\, \frac{2n-1!!}{2n!!} \ = \ \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \ + \ O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$$

Proviamo infine, come applicazione dell'integrazione per parti, la

Formula di Taylor con resto integrale . Sia $\varphi \in C^\infty([0,1])$. Allora,

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)dt \qquad (T)_n$$

Dimostrazione. $(T)_1$ é il TFC: $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt$. $(T)_2$ si ottiene da $(T)_1$ mediante una integrazione per parti :

$$\int_0^1 \varphi'(t)\, dt \ = \ \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\, dt \ - \ (1-t)\varphi'(t)\,|_0^1 \ = \ \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\, dt \ + \ \varphi'(0)$$

Analogamente, $(T)_{n+1}$ segue da $(T)_n$ mediante integrazione per parti:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)\, dt \ = \ \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\, \varphi^{(n+1)}(t)\, dt + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)$$

INTEGRALI IMPROPRI

INTEGRAZIONE SU INTERVALLI ILLIMITATI

Definizione Sia f integrabile in $[a, x]$ $\forall\, x \geq a$. Se $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$ esiste

$$\int_a^{+\infty} f \;:=\; \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

si dice **integrale improprio** (o in senso generalizzato) di f su $[a, +\infty)$.
Se tale limite é finito, f si dice **a integrale convergente** (o integrabile in senso generalizzato) su $[a, +\infty)$

NOTA.

In generale, $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$ non esiste (ad esempio, se $f(x) = \sin x$) e non ha quindi significato in generale la scrittura $\int_a^{+\infty} f$.

Tuttavia, se **f** é **non negativa**, da $\int_a^y f = \int_0^x f + \int_x^y f \geq \int_0^x f$ se $x \leq y$ segue che $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$ esiste sempre, finito od infinito, e quindi **é sempre definito**

$$\int_a^{+\infty} f \;:=\; \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

L'**integrabilitá per funzioni non negative** si potrá scrivere nella forma

$$\int_a^{+\infty} f \;<\; +\infty$$

UN ESEMPIO FONDAMENTALE : $$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \;<\; +\infty \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \;>\; 1$$

Infatti, $\alpha \neq 1 \;\Rightarrow\; \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1) \to_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha - 1}$ se $\alpha > 1$ mentre $\frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1) \to +\infty$ se $\alpha < 1$. Infine, per $\alpha = 1$ si ha $\int_0^x \frac{dt}{t} = \log x \to_{x\to+\infty} +\infty$

ALTRI ESEMPI

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt \;=\; \frac{\pi}{2}$

2) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} = n!$

3) $\int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}}\, dt \;=\; \frac{1}{n}$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \;+\; O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$

Esecuzione dei calcoli.

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \arctan t\,|_0^x \;=\; \frac{\pi}{2}$

2) Sia $n = 1$: $\int_0^x \, t\, e^{-t}\, dt \;=\; \int_0^x \, e^{-t}\, dt \;-\; xe^{-x} \;\to_{x\to+\infty}\, 1.$

Poi, da $\int_0^x \, t^n\, e^{-t}\, dt \;=\; n\int_0^x \, t^{n-1}\, e^{-t}\, dt \;-\; x^n\, e^{-x} \;\to_{x\to+\infty}\; n\int_0^{+\infty} \, t^{n-1}\, e^{-t}\, dt$ segue

$$\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, dt \;=\; n\int_0^{+\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\, dt \;=\; n!$$

3) Posto $t \;=\; \sinh s$ si ha

$$\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}}\, dt \;=$$

$$\int_0^{\sinh^{-1} x} \frac{\sinh^{n-1} s}{\cosh^{n+1} s}\, ds \;=\; \int_0^{\sinh^{-1} x} [\frac{\sinh s}{\cosh s}]^{n-1} \frac{d}{ds}[\frac{\sinh s}{\cosh s}]\; ds \;=\; \frac{1}{n}\, [\frac{\sinh s}{\cosh s}]^n\, |_0^{\sinh^{-1}(x)}$$

$$= \frac{1}{n}\, [\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}]^n \;\to_{x\to+\infty}\; \frac{1}{n}$$

4) Sia $n = 1$: $\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2} \;=\; \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)} \;+\; \frac{x}{2(1+x^2)} \;\to_{x\to+\infty}\; \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}.$

Poi, da

$$\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} \;=\; \frac{2n-1}{2n} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} \;+\; \frac{x}{2n(1+x^2)^n}$$

$$\to_{x\to+\infty}\; \frac{2n-1}{2n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

segue

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} \;=\; \frac{2n-1}{2n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \;=\; \frac{2n-1!!}{2n!!}\,\frac{\pi}{2} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \;+\; O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$$

Alternativamente, posto $t = \tan s$, si ottiene: $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} s\, ds$

L'INTEGRALE DI GAUSS: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Il calcolo dell'integrale di Gauss si puó effettuare utilizzando la formula di Wallis.

Cominciamo con la diseguaglianza elementare

$$(*) \qquad 1 - x \le e^{-x} \le \frac{1}{1+x}\,, \quad \forall x \ge 0$$

La diseguaglianza di sinistra, valida per $x = 0$, segue da $\frac{d}{dx}[e^{-x} - (1-x)] = -e^{-x} + 1 \ge 0,\ \ \forall x \ge 0$. La diseguaglianza di destra, equivalente a $x - \log(1+x) \ge 0$, segue da

$$\tfrac{d}{dx}[x - \log(1+x)] = 1 - \tfrac{1}{1+x} \ge 0, \quad \forall x \ge 0.$$

Sostituendo x con x^2 in $(*)$, elevando alla n ed integrando, si ottiene

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \le \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \le \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Effettuando il cambio di variabile $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$ in $\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx$, otteniamo

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n dx \le \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \le \sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Ricordiamo che $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{2n-1}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Inoltre, effettuando il cambio di variabile $x = \cos t$, otteniamo

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\, dt = \frac{2n!!}{2n+1!!} = \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

ove l'ultima uguaglianza segue dalla formula di Wallis. Riassumendo:

$$\sqrt{\frac{n\pi}{2(2n+1)}} + \circ(1) \le \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n\pi}{2n+1}} + \circ(1)$$

Passando al limite per n tendente all'infinito si ottiene $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Condizioni di integrabilitá.

Criterio del Confronto Siano f, g integrabili in $[a, x]$ $\forall$ $x \geq a$, $g \geq 0$. Allora

(i) $\exists R \geq a : \; |f(x)| \leq g(x) \;\; \forall x \geq R, \;\; \int_a^{+\infty} g < +\infty \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^{+\infty} |f| < +\infty$

(ii) $\exists R \geq a : \; 0 \leq g \leq |f| \;\; \forall x \geq R, \;\; \int_a^{+\infty} g = +\infty \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^{+\infty} |f| = +\infty$

Infatti: (i): $\int_a^x |f| \leq \int_a^R |f| + \int_R^{+\infty} g \;\; \forall x$ (ii): $\int_R^x |f| \geq \int_R^x g \to_{x\to+\infty} +\infty$

Corollario .

(i) $\exists M, R > 0, \; \alpha > 1 : \; 0 \leq |f|(x) \leq \frac{M}{x^\alpha} \;\; \forall\, x \geq R \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^{+\infty} |f| < +\infty$

(ii) $\exists M, R > 0 : \; |f|(x) \geq \frac{M}{x}, \;\; \forall \; x \geq R \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^{+\infty} |f| = +\infty$

Integrabilitá e comportamento asintotico.

(i) $\exists \alpha > 1 : \; x^\alpha |f(x)| \to_{x\to+\infty} c < +\infty \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^{+\infty} |f| < +\infty$

(ii) $x|f(x)| \to_{x\to+\infty} c > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^{+\infty} |f| = +\infty$

I criteri sopra esposti sono infatti criteri di

Assoluta integrabilitá Sia f integrabile in $[a, x]$ $\forall\, x \geq a$. f si dice assolutamente integrabile su $[a, +\infty)$ se

$$\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$$

La rilevanza dei criteri di confronto é descritta in particolare dal fatto seguente

L'assoluta integrabilitá implica l' integrabilitá

$$\int_a^{+\infty} |f| < +\infty \;\; \Rightarrow \;\; \exists \;\; \int_a^{+\infty} f$$

Questo fatto é a sua volta una conseguenza del

Criterio di Cauchy. Sia f integrabile in $[a, x]$ $\forall\, x \geq a$. Allora

$$\exists \;\; \int_a^{+\infty} f \;\; \Leftrightarrow \;\; (\forall \epsilon > 0, \; \exists x_\epsilon : \;\; x_\epsilon \leq x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad |\int_{x_1}^{x_2} f| \leq \epsilon)$$

che altro non é che la condizione di Cauchy perché esista finito il limite, per x tendente all'infinito, di $F(x) := \int_a^x f$. Infatti : $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f$.

Ed allora, se $\int_a^x |f| < +\infty$, e quindi $\int_a^x |f|$ soddisfa la condizione di Cauchy, anche $\int_a^x f$ soddisfa la condizione di Cauchy, dato che $| \int_{x_1}^{x_2} f| \leq | \int_{x_1}^{x_2} |f| |$.

NOTA. Una f puó essere integrabile senza essere assolutamente integrabile:

CONTROESEMPIO 1. $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n-1,n)}(x)$

(funzione che vale $\frac{(-1)^n}{n}$ in $[n-1,n)$ e zero in $(-\infty,0)$).

$$(i) \quad \int_0^{+\infty} |f| = +\infty, \qquad (ii) \quad \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Infatti: (i) $\int_0^x |f| \geq \int_0^{[x]} |f| = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n} \to_{x\to+\infty} \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

(ii) $\int_0^x f = \int_0^{[x]} f + \int_{[x]}^x f = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{(-1)^n}{n} + \int_{[x]}^x f \to_{x\to+\infty} \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

perché $| \int_{[x]}^x f | \leq \frac{1}{1+[x]} \to_{x\to+\infty} 0.$

CONTROESEMPIO 2. $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

$$(i) \quad \int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| \, dt = +\infty, \qquad (ii) \quad \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t} \, dt \qquad \text{esiste finito}$$

Prova di (i). Sia $I := \{x \in [0,\pi] : \sin x \geq \frac{1}{2}\}$, $I_n := I + (n-1)\pi$. É

$l(I_n) = l(I) > 0 \ \ \forall n \in \mathbf{N}$ e $|\frac{\sin x}{x}| \geq \frac{1}{2n\pi}$, $\forall x \in I_n$. Dunque

$$\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| \, dt \geq \int_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n\pi} \chi_{I_n}(t) dt \geq l(I) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n\pi} = +\infty$$

Prova di (ii).

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} \, dt = -\int_1^x \frac{\cos t}{t^2} \, dt - \frac{\cos t}{t}\Big|_1^x \to -\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \, dt + \cos 1.$$

Infatti $\int_1^{+\infty} |\frac{\cos t}{t^2}| \, dt < +\infty$ perché $|\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} < +\infty$.