AM1b - Tutorato - Venerdí 6 maggio 2005 d.C.
tutori Federico Coglitore e Gabriele Fusacchia

1. Dimostrare il seguente :
   Teorema: Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua in $\mathbb{R}$ se e solo se, per ogni aperto $A \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(A)$ é un aperto.

2. Dimostrare che se una funzione f é uniformemente continua su due intervalli $(a, b]$ e $[b, c)$, allora f é uniformemente continua su (a, c).

3. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice Lipschitziana se
   $\exists M > 0$ t.c. $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|\ \forall x, y \in A$.
   Dimostrare che una funzione Lipschitziana é uniformemente continua.
   Fornire un esempio di una funzione uniformemente continua non Lipschitziana.

4. Sia f una funzione continua in $[m, +\infty)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Dimostrare che f é uniformemente continua.

5. Stabilire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue nei domini indicati:

   (a) $f(x) = \sin x$ in $\mathbb{R}$
   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $\mathbb{R}$
   (c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ in $[0, +\infty)$
   (d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ in $[1, +\infty)$
   (e) $f(x) = e^x$ in $\mathbb{R}$
   (f) $f(x) = e^x$ in $(-\infty, 3]$
   (g) $f(x) = x\sqrt{x}$ in $[0, +\infty)$
   (h) $f(x) = \cos x^2$ in $\mathbb{R}$

6. Dimostrare il seguente :
   Teorema: Una funzione limitata, continua in $\mathbb{R}$ tranne che in un numero finito di punti, e nulla al di fuori di un intervallo, é integrabile (secondo Riemann).