AM1b - Tutorato - Lunedí 28 febbraio 2005 d.C.
tutori Federico Coglitore e Gabriele Fusacchia

1. Calcolare sup e inf dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:
   (a) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 5\}$
   (b) $\{\pi\}$
   (c) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$
   (d) $\{z \in \mathbb{Z} : z \geq -7\}$
   (e) $I(4, 13) := \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| < 10\}$
2. Dimostrare che se (A, B) é una sezione in $\mathbb{R}$, allora $\sup A = \inf B$.
3. Dimostrare tramite il principio di induzione le seguenti relazioni:
   (a) $\sum_{k=1} nk^3 = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1} nk\right)^2$
   (b) $n^n \geq n! \geq 2^{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq 1$
   (c) $\sum_{k=0} n4k + 1 = (2n + 1)(n + 1)$
   (d) $4^n - 2 \equiv 2(\text{mod } 3)$
   (e) $2^n > n^4$ definitivamente
4. Dimostrare che ogni sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ ha massimo e minimo.
5. Dimostrare che l'equazione $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ammette almeno una radice reale.
   (suggerimento: usare il teorema sugli zeri di un polinomio).