ESERCITAZIONE VIII DI AM1B

Nella presente lezione si vedranno alcune proprietà degli integrali. Infine faremo alcuni esercizi sulla derivabilità di alcune funzioni.

1. Esempi e proprietà degli integrali

Definizione 1.1. Si dice funzione caratteristica di un insieme $A \subset I$ la funzione $\chi_A : I \to \mathbb{R}$

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Ricordiamo che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice integrabile se si ha

$$\inf_{\varphi \text{ semplice} \quad \varphi \geq f} \mathcal{I}(\varphi) = \sup_{\varphi \text{ semplice} \quad \varphi \leq f} \mathcal{I}(\varphi)$$

dove una funzione semplice è una funzione costante a tratti, cioè del tipo

$$\sum_i a_i \chi_{I_i}$$

con $\{I_i\}$ una suddivisione in intervalli di I e $\mathcal{I}(\varphi)$ è l'area del plurirettangolo determinato da φ

Esempio 1.2. Calcoliamo l'area A dello spazio compreso tra la funzione $y = e^{ax}$ e $y = 0$ nell'intervallo $[0, b]$.

Dividiamo l'intervallo $[0, b]$ in n intervalli uguali di lunghezza $\frac{b}{n}$. Costruiamo l'unione T (risp. T') dei rattangoli con base di lunghezza $\frac{b}{n}$ che sono inscritti nel (risp. inscrivono il) grafico di $y = e^{ax}$.

Si ha

$$Area(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b}{n} e^{\frac{abk}{n}} = \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{ab}{n}})^k = \frac{b}{n} \frac{e^{ab} - 1}{e^{\frac{ab}{n}} - 1}$$

ed

$$Area(T') = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} e^{\frac{abk}{n}} = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} (e^{\frac{ab}{n}})^k = \frac{b}{n} \frac{e^{ab} - 1}{e^{\frac{ab}{n}} - 1} e^{\frac{ab}{n}}$$

Poiché

$$\frac{b}{n} \frac{e^{ab} - 1}{e^{\frac{ab}{n}} - 1} = Area(T) \leq A \leq Area(T') = \frac{b}{n} \frac{e^{ab} - 1}{e^{\frac{ab}{n}} - 1} e^{\frac{ab}{n}}$$

Sicché facendo tendere n ad infinito si ha, sfruttando $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, come provato nell'esercizio seguente,

$$A = \frac{e^{ab} - 1}{a}$$

Esempio 1.3. Si ha per ogni $a > 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Si considerino

$$f(x) = a^x - 1$$
$$g(x) = \frac{x}{\log_a(x+1)}$$

Sicché

$$\frac{a^x - 1}{x} = g \circ f$$

Quindi poiché $\lim_{x\to 0} f = f(0) = 0$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{1/y \log_a(y+1)} = \frac{1}{\log_a(1+y)^{1/y}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la nota proprietà dei logaritmi

$$\log_A(C) = \log_A(B)\log_B(C)$$

per ogni $A, B, C > 0$.

Definizione 1.4. Sia f una funzione a valori reali allora definiamo parte positiva

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

e parte negativa

$$f^-(x) = \min\{f(x), 0\}$$

Chiaramente

$$f = f^+ + f^-$$
$$|f| = f^+ - f^-$$

Proposizione 1.5. *Se f è integrabile allora f^+, f^- e $|f|$ sono integrabili.*

Dimostrazione. Poiché f è integrabile per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni semplici φ_1 e φ_2 tali che

$$\varphi_1 \le f \le \varphi_2$$
$$\mathcal{I}(\varphi_2) - \mathcal{I}(\varphi_1) < \varepsilon$$

con $\mathcal{I}(\varphi_i)$ l'area del plurirattangolo determinato da φ_i. Sicché si ha

$$\varphi_1^+ \le f^+ \le \varphi_2^+$$
$$\mathcal{I}(\varphi_2^+) - \mathcal{I}(\varphi_1^+) < \varepsilon$$

e quindi f è integrabile.

Ora si ha

$$f^- = f - f^+$$

sicché anche f^- è integrabile. Inoltre poiché

$$|f| = f^- - f^+$$

si ha che anche $|f|$ è integrabile. □

Proposizione 1.6. *Date due funzioni integrabile f, g con $|f| \leq |g|$ si ha*

$$\int f \leq \int g$$

Dimostrazione. Poiché f è g sono integrabili è noto dalla teoria che esistono φ_n e ψ_n successioni di funzioni semplici rispettivamenti minoranti di f e maggioranti di g tali che

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(\varphi_n) = \int g \qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(\psi_n) = \int f$$

Quindi si ha

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(\varphi_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(\psi_n) = \int g$$

□

Esempio 1.7. Si consideri la funzione di Dirchelet in $[0, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

f non è integrabile. Si noti che $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap I}$.

$\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ è denso in $[0, 1)$ sicché le uniche funzioni semplici φ tali che $\varphi \geq f$ sono del tipo $\varphi = \sum_i a_i \chi_{I_i}$ con $a_i \geq 1$. Perciò

$$S'' = \inf_{\varphi \text{ semplice} \quad \varphi \geq f} \mathcal{I}(\varphi) = 1$$

Mentre le uniche funzioni semplici $\varphi \geq f$ sono $\varphi = \sum_i a_i \chi_{I_i}$ con $a_i \leq 0$ e quindi

$$S' = \sup_{\varphi \text{ semplice} \quad \varphi \leq f} \mathcal{I}(\varphi) = 0$$

Perciò f non è integrabile.

Esempio 1.8 (L'integrabilità non è una proprietà puntuale)**.** Se $f(x)$ è una funzione nulla tranne che in un numero finito di punti allora f è integrabile ed il suo integrale è zero.

Si supponga dapprima $f \geq 0$. Siano $p_1, \dots, p_k$ i punti in cui f è diversa da zero. Si consideri la seguente successione di funzioni semplici

$$\sum_{i=1}^{k} f(p_i)\chi_{(p_i-1/n, p_i+1/n)}$$

dove χ_I è la funzione caratteristica dell'intervalo I. Clarly

$$\mathcal{I}(\varphi_n) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{k} f(p_i)$$

sicché, usando le notrazioni dell'esercizio precedente,

$$S'' = \inf \mathcal{I}(\varphi_n) = 0$$

D'altra parte S' è chiaramente 0 sicché la funzione è integrabile e $\int f = 0$.

Se f non è positiva allora $f = f^+ - (-f^-)$ con f^+ e f^- funzioni positive nulle ovunque tranne che in un numero finito di punti. Sicché da quanto appena provato si ha la tesi.

Si osservi che se due funzioni f e g differiscono in un numero finito di punti ed f è integrabile allora g è integrabile e $\int f = \int g$. Infatti $g - f$ è nulla trenne che in un numero finito di punti sicché è integrabile di untegrale nullo. Quindi $g = (g - f) + f$ è integrabile e

$$\int g = \int (g - f) + \int f = \int f$$

2. Derivabilità

Esempio 2.1. Calcoliamo la derivata, utilizzando la definizione, di

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

Per ogni x_0 si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x_0+1}}{x - x_0} = -\lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x_0+1)(x+1)} = -\frac{1}{(x_0+1)^2}$$

Discutiamo la derivabilità di alcune funzioni.

Esempio 2.2. Verificare per quali $a \in \mathbb{R}$ ed $n \in \mathbb{N}$ la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x^2+1}, & x \leq 0; \\ x^n + ax, & x \geq 0. \end{cases}$$

Per $x \neq 0$ la funzione è derivabile per ogni a ed n e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a \cos ax (x^2+1) - 2x(\sin ax)}{(x^2+1)^2}, & x < 0; \\ nx^{n-1} + a, & x > 0. \end{cases}$$

Indichiamo con $f'^{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$, mentre con $f'^{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x}$. Allora f è derivabile in 0 se e solo se $f'^{-}(0) = f'^{+}(0)$. D'altra parte sia $\frac{\sin ax}{x^2+1}$ che $x^n + ax$ hanno derivate continue in 0. Sicché calcolando le rispettive derivate in 0 si ha

$$f'^{-}(0) = a \qquad \text{e} \qquad f'^{+}(0) = a$$

E quindi f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ per ogni a ed n. In più si ha che f è C^1 in quanto la derivata è continua.

Esempio 2.3. Dire se le funzioni $f(x) = \sin(|x|)$ e $g(x) = \cos(|x|)$ sono derivabili. Sviluppando il modulo abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \leq 0; \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$$

$$g(x) = \cos x$$

Per $g(x)$ si osservi che $\cos x$ è pari, cioè $\cos x = \cos(-x)$ per ogni x.

Quindi $f(x)$ è sicuramente derivabile per $x \neq 0$. In 0, ragionando come sopra, si ha

$$f'^{-}(0) = -\cos 0 = -1$$

e

$$f'^{+}(0) = \cos 0 = 1$$

E quindi f non è derivabile in 0.

Mentre g è chiaramente derivabile su tutto $\mathbb{R}$.