IV ESERCITAZIONE DI AM1B

1. Criterio di Cauchy

Definizione 1.1. Una successione è di cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste tale che per ogni $n, m > \mu$ si abbia

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Teorema 1.2. *Una successione converge se e sole se è di Cauchy.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Supponiamo che $a_n \to l$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $n > n_0$ si ha

$$|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$) Sia $\{a_n\}$ una successione di Cauchy. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste quindi n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$

$$|a_n - a_m| < 1$$

In particolare

$$|a_n - a_{n_0}| < 1$$

per ogni $n \geq n_0$. Da cui segue che $\{a_n\}$ è limitata.

Per il Teorema di Bolzano Weierstrass segue che esiste una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ convergente ad un certo limite $l \in \mathbb{R}$. Sicché esiste n_1 tale che per ogni $n \geq n_1$

$$|a_{k_n} - l| < \varepsilon$$

Si prenda $\bar{n} = \max n_0, n_1$. Allora poiché, per definizione di sottosuccesione k_n è una funzione crescente allora segue immediatamente che $k_n \geq n$ poer ogni n. Quindi per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$|a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - l| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - l| < 2\varepsilon$$

□

Tale criterio si ha anche per le serie.

Definizione 1.3. Una serie è detta di Cauchy se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ la successione delle somme parziali $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ è di Cauchy. Cioè se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$|S_{n+k} - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

Teorema 1.4. *Una serie è di Cauchy se e solo se converge.*

Dimostrazione. Basta applicare 1.2 alla successione S_n. □

Esempio 1.5. La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
diverge a $+\infty$. Essendo una serie a termini positivi la successione delle somme parziali è crescente sicchè la serie ammette limite. Facciamo vedere che la serie suddetta non è di Cauchy e quindi non converge per il criterio.

Infatti per ogni n si ha
$$\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}$$

L'esempio precedente prova anche che non vale il viceversa della seguente proposizione che dà una condizione necessaria per la convergenza di una serie.

Proposizione 1.6. *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ *allora* $a_n \to \infty$*.*

Dimostrazione. Poniamo $a_n = S_n - S_{n-1}$. Allora
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = l - l = 0$$
□

Esempio 1.7. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1/n}$ diverge perché $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$.

2. Criteri del rapporto e della radice

Proposizione 2.1 (Criterio della radice)**.** *Sia* $\{a_n\}$ *una successione a termini positivi. Sia*
$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = L$$
con $0 \leq L \leq +\infty$*. Allora*
$$L < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$
e
$$L > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$$

Dimostrazione. La serie ammette limite in quanto è a termini positivi. Se $L < 1$ allora per ogni $n \geq n_0$
$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1+L}{2} < 1$$
quindi
$$a_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$$
da cui segue
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+L}{2}\right)^n < \infty$$
Mentre se $L > 1$ si ha $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Quindi $a_n \geq 1$. Sicché a_n non è infinitesimale e quindi la serie diverge.
□

Proposizione 2.2 (Criterio del rapporto)**.** *Sia* $\{a_n\}$ *tale che*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$$

Allora

$$L<1\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_n<\infty$$

e

$$L>1\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\infty$$

Dimostrazione. La tesi segue dal fatto che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}_n=L$$

□

3. Esempi di successioni

Esempio 3.1. Siano $P(n)=a_rn^r+\cdots+a_0$ e $Q(n)=b_sn^s+\cdots+b_0$ due polinomi con $a_r,b_s\neq 0$. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}$$

Si ha

$$\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{a_rn^r+\cdots+a_0}{b_sn^s+\cdots+b_0}=\frac{n^r}{n^s}\frac{a_r+\frac{a_{r-1}}{n}+\cdots+\frac{a_0}{n^r}}{b_r+\frac{b_{r-1}}{n}+\cdots+\frac{b_0}{r^s}}$$

Sicché

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{a_rn^r}{b_sn^s}$$

Cioè

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\begin{cases}0, & \text{se r<s;}\\ \frac{a_r}{b_r}, & \text{se r=s;}\\ \infty, & \text{se r>s .}\end{cases}$$

Esempio 3.2. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\frac{1}{n}}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ si ha

$$\frac{(n+1)-n}{(\sqrt{n}+\frac{1}{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}$$

che tende a zero.

Esempio 3.3 (Teorema di Césaro)**.** Sia $a_n\to l\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Allora

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i=l$$

Supponiamo $l \in \mathbb{R}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$, $|a_n - l| < \varepsilon$. Allora per $n \geq n_0$

$$|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} a_i - l| \leq \frac{1}{n}|\sum_{i=1}^{n_0}(a_i - l)| + \frac{1}{n}|\sum_{i=n_0+1}^{n}(a_i - l)| < \frac{n_0}{n}\max\{a_i | i = 1, \dots, n\} + \frac{n - n_0}{n}\varepsilon$$

e quindi se $n \to \infty$ segue la tesi. In modo simile si tratta il caso in cui a_n diverge.

Ad esempio

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} \ln i}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

4. Esempi di serie

Esempio 4.1. Mostriamo la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^n}$$

Applicando il criterio della radice a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a|^n}{n^n}$, si ottiene $\frac{|a|}{n} \to 0$, da cui si ha la convergenza assoluta (e quindi la convergenza) della serie di partenza per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esempio 4.2. Proviamo la convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

infatti

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = (1 + \frac{1}{n})^n \to e$$

Esempio 4.3. Grazie al criterio della radice mostriamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} < +\infty$, infatti

$$\sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$$

e quindi si ha la convergenza assoluta per ogni $a \in \mathbb{R}$.