SOLUZIONI 6

Di Gregorio Laura

Esercizio 1. Confrontando con la serie associata si ottiene:

(a) No, perchè $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\log n}=\infty$

(b) Sì $\frac{\sinh\pi}{\pi}$ ponendo $z=i$ nella formula $\sin\pi z=\pi z\prod_{n\geq 1}(1-z^2/n^2)$

(c) No, perchè $\sum_{n\geq 1}1/n=\infty$

(d) Sì. Essendo

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1\,,\qquad \text{(telescopica)}$$

si ha

$$\prod_{n\geq 1}\exp\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)=\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}\right)=e$$

(e) Sì. Si consideri la funzione

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0}x^n\,,\qquad \text{per}\quad |x|<1\,.$$

Derivando si ottiene

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n\geq 1}nx^{n-1}\,,\qquad \text{per}\quad |x|<1\,,$$

da cui

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n\geq 1}nx^n\,,\qquad \text{per}\quad |x|<1.$$

Sostituendo $x=1/2$ si ha

$$\prod_{n\geq 1}\exp\left(\frac{n}{2^n}\right)=\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n}\right)=\exp\left(\frac{1/2}{(1/2)^2}\right)=e^2\,.$$

(f) Sì $\frac{2}{\pi}$ ponendo $z = 1/2$ nella formula $\sin \pi z = \pi z \prod_{n \geq 1}(1 - z^2/n^2)$

Esercizio 2. Dal momento che gli zeri di $\sin \pi(z + a)$ sono $z = -n - a$, $n \in \mathbb{Z}$ per il Teorema di Fattorizzazione di Weierstrass scriviamo

$$\sin \pi(z + \alpha) = e^{\gamma(z)} \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n + \alpha}\right) e^{-z/(n+\alpha)} .$$

con $\gamma \in H(\mathbb{C})$. Definendo $g(z) := e^{\gamma(z)}$ calcoliamo la derivata logaritmica g'/g. Si ottiene

$$\begin{aligned}
\pi \cot \pi(z + \alpha) &= \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{n+\alpha}}{(1 + \frac{z}{n+\alpha})} - \frac{1}{n + \alpha} \\
&= \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + n + \alpha} - \frac{1}{n + \alpha} \\
&= \frac{g'(z)}{g(z)} + \left[\frac{1}{z + \alpha} + \sum_{|n|>0} \frac{1}{z + n + \alpha} - \frac{1}{n}\right] - \left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{|n|>0} \frac{1}{n + \alpha} - \frac{1}{n}\right] \\
&= \frac{g'(z)}{g(z)} + \pi \cot \pi(z + \alpha) - \pi \cot \pi\alpha
\end{aligned}$$

da[1] cui

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi \cot \pi\alpha$$

e quindi

$$g(z) = c \exp(\pi z \cot \pi\alpha)$$

per un'opportuna costante $c \in \mathbb{R}$. Tale costante risulta essere uguale ad 1 sostituendo $z = 0$ e $\alpha = 1/2$.

Esercizio 3. Si ha $\cos(\pi w) = \sin(\pi(w + \frac{1}{2}))$. Usando l'espressione di l'espressione precedente con $a = 1/2$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\sin\left(\pi\left(w + \frac{1}{2}\right)\right) &= \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{w}{n + \frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{w}{n+\frac{1}{2}}} \\
&= \prod_{n \geq 0} \left(1 + \frac{w}{n + \frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{w}{n+\frac{1}{2}}} \cdot \prod_{n<0} \left(1 + \frac{w}{n + \frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{w}{n+\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

[1] Si ricordi che

$$\pi \cot \pi w = \frac{1}{w} + \sum_{|n|>0} \frac{1}{n + w} - \frac{1}{n} .$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{n\geq 0}\left(1+\frac{w}{n+\frac{1}{2}}\right)e^{-\frac{w}{n+\frac{1}{2}}} \cdot \prod_{n>0}\left(1-\frac{w}{n-\frac{1}{2}}\right)e^{\frac{w}{n-\frac{1}{2}}} \\
&= \prod_{n\geq 0}\left(1+\frac{w}{n+\frac{1}{2}}\right)e^{-\frac{w}{n+\frac{1}{2}}} \cdot \prod_{n\geq 0}\left(1-\frac{w}{n+\frac{1}{2}}\right)e^{\frac{w}{n+\frac{1}{2}}} \\
&= \prod_{n\geq 0}\left(1-\frac{w^2}{(n+\frac{1}{2})^2}\right) = \prod_{n\geq 0}\left(1-\frac{4w^2}{(2n+1)^2}\right)
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\cos(\pi w) = \prod_{n\geq 0}\left(1-\frac{4w^2}{(2n+1)^2}\right) .
$$

Sostituendo $\sqrt{z} = \pi w$ si ottiene

$$
\cos(\sqrt{z}) = \prod_{n\geq 0}\left(1-\frac{4z}{\pi^2(2n+1)^2}\right) .
$$