AC1 – Tutorato 8

Paolo Tranquilli

Venerdì 6 Maggio

1. Dimostrare il seguente corollario del lemma di Schwartz (vedi tutorato 6):

   Corollario 1 *Sia $f : D \to D$ olomorfa con $f(0) = 0$. Allora $|f'(0)| \leq 1$ e $|f'(0)| = 1$ se e solo se $f(z)$ è una rotazione.*

   Utilizzando gli automorfismi del cerchio estendere il risultato mostrando che se $f : D \to D$ è olomorfa allora per ogni $z_0 \in D$ ho che
   $$|f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}.$$
   Inoltre esiste z_0 per cui vale l'uguaglianza se e solo se f è un automorfismo del cerchio, e in tal caso l'uguaglianza vale per ogni $z_0 \in D$.

2. Sia f olomorfa su Ω aperto con $D \subseteq \Omega$, tale che $|f(z) - z| < |z|$ per ogni $z \in S^1$, ovvero sulla circonferenza di raggio uno. Mostrare che:
   - $|f'(1/2)| \leq 11/6$;
   - f ha esattamente uno zero in D.

3. Trovare una funzione lineare fratta che porti $0, 1, \infty$ in $1, -1, i$ e una che porti $1, -1, i$ in $1, i, -1$. Dove portano il semipiano a parte immaginaria positiva?

4. Trovare una mappa conforme che porti il semicerchio a parte immaginaria positiva nel semipiano a parte immaginaria positiva. (*suggerimento*: prima portare il semicerchio in un quadrante)

5. Trovare per ogni α un isomorfismo tra $D - [\alpha, 1)$ e $D - [0, 1)$. Concludere trovando una mappa conforme tra $D - [\alpha, 1)$ e il semipiano a parte immaginaria positiva.

6. (*difficile*) Sia $\gamma : [0, 1] \to D$ una curva regolare. Definiamo una lunghezza di γ:
   $$|\gamma| := \int_0^1 \frac{2\,|\dot\gamma(t)|\; dt}{1 - |\gamma(t)|^2}.$$
   Mostrare velocemente che $|\gamma|$ è ben definita e che $|\gamma| = 0$ se e solo se γ è costante. Mostrare che tale lunghezza è invariante per automorfismi del cerchio.

   Definiamo per $\alpha, \beta \in D$ una distanza
   $$d(\alpha, \beta) := \inf\{\, |\gamma| : \gamma(0) = \alpha,\ \gamma(1) = \beta \,\}.$$
   Chiaramente $d(\alpha, \beta) \geq 0$. Prima di mostrare per intero che è una distanza, constatare che d è simmetrica ed è invariante per automorfismi, ovvero se $f \in \mathrm{Aut}\,(D)$
   $$d(f(\alpha), f(\beta)) = d(\alpha, \beta).$$
   Dando per scontato che se $\alpha = 0$ allora la geodetica (ovvero la curva che realizza $d(0, \beta)$ come minimo) esiste unica ed è il segmento $[0, \beta]$, calcolare esplicitamente $d(0, \beta)$ e verificare che $d(0, \beta) = 0$ se e solo se $\beta = 0$. Concludere

mostrando che d è una distanza e calcolarla esplicitamente. Dati α e β arbitrari in D, esiste sempre una geodetica che le unisce? È unica? Che forma ha? (studiare cosa succede ai diametri di D quando si applica un automorfismo)

Due geodetiche si dicono parallele se non si intersecano. Data una geodetica e un punto esterno ad essa, esiste una geodetica passante per il punto e parallela alla geodetica data? Se sì, è unica? Se non è unica, quante sono?