AC1 – TUTORATO 4
VENERDÌ 18 MARZO 2005

PAOLO TRANQUILLI

(1) Calcolare i seguenti integrali:
   (a) $\int_\gamma \left(\frac{z^2}{(2z-1)^2(z-3)} + z\overline{z} \right) dz$, dove γ è la circonferenza di centro 1 e raggio 1 percorsa una volta in senso orario.
   (b) $\int_\gamma \left(\frac{\cos z}{2z^3-9z^2+12z-4} + \overline{\left(\frac{\sin z}{3z^3-14z^2+13z+6} \right)} \right) dz$, dove γ è la circonferenza di raggio 1 e centro 0 percorsa in senso antiorario.

(2) Sia $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ un disco aperto centrato nell'origine e sia f una funzione olomorfa in $\Delta - \{0\}$. Conoscendo f, che tipo di singolaritá avrà $1/f$ in 0?

(3) Classificare (se ha senso) le singolarità delle seguenti funzioni:
   (a) $\dfrac{|z|^2}{z}$;
   (b) $e^{1/z}$;
   (c) $e^{-1/z}$;
   (d) $\sin \dfrac{1}{z}$;
   (e) $\dfrac{\sin z}{z}$;
   (f) $\dfrac{z}{\sin z}$;
   (g) $\dfrac{\sin z}{z^2}$;
   (h) $\dfrac{1}{\sin z}$.

(4) Sia S l'insieme dei poli di una funzione f. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto tale che f è olomorfa in $\Omega - S$. Mostrare che $S \cap \Delta$ è un insieme finito per ogni Δ disco chiuso contenuto in Ω.

(5) Una funzione f si dice periodica di periodo $w \in \mathbb{C}$ se per ogni z tale che $f(z)$ è definita ho $f(z+w)$ definita con $f(z+w) = f(z)$.

   Sia f una funzione con periodi w_1, w_2 e w_3 linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$. Si dimostri che f è costante.
   (*suggerimento*: mostrare che esistono combinazioni lineari di w_1, w_2 e w_3 a coefficienti in $\mathbb{Z}$)