AC1 – TUTORATO 3
VENERDÌ 11 MARZO 2005

PAOLO TRANQUILLI

(1) Sia $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ un disco centrato nell'origine. Dimostrare che se $f(z)$ olomorfa in $\Delta - \{0\}$ tale che
$$\lim_{z\to 0} z f(z) = 0$$
allora per ogni γ curva chiusa in $\Delta - \{0\}$ ho
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

(2) Dimostrare che se due serie $\sum a_n(z-z_0)^n$ e $\sum b_n(z-z_0)^n$ convergono in un intorno U di z_0 alla stessa funzione, allora $\forall n : a_n = b_n$.

(3) Calcolare i seguenti integrali:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z}\, dz, \qquad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi];$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\, dz, \qquad \gamma(t) = 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi];$

(c) $\displaystyle\int_\gamma (z^2+z)\, dz, \qquad \gamma(t) = \sin^3 t \cos t + i\sqrt{t}\sqrt{2\pi}, \quad t \in [0, 2\pi];$

(d) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}^2\, dz, \qquad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi];$

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{z-1}\, dz, \qquad \gamma(t) = 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi];$

(f) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{z-2}{2z-1}\right)^3 dz, \qquad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi];$

(g) $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z)\, dz, \qquad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi];$

(4) Dimostrare che non esiste una funzione $f(z)$ olomorfa in un intorno U di 0 tale che per ogni n con $1/n \in U$ si abbia
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

(5) Dimostrare che per γ cammino chiuso in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ convesso aperto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa ho
$$\forall z \in \Omega - \gamma : \quad f'(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$