Soluzioni II

25/03/2004

Esercizio 1. Si ha che la densità congiunta di $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ è data da

$$f(\mathbf{x}|\theta) = \frac{1}{\left(e^{-\theta} - e^{-1}\right)^n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i\right\} I_A(\mathbf{x})$$

con $A = \left\{(x_1, ..., x_n) : \theta \leq x_{(1)} \leq 1\right\}$ e $x_{(1)} = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$, da cui segue che $T(\mathbf{X}) = \left(X_{(1)}\right)$

Esercizio 2. La densità congiunta del campione è data da

$$f(\mathbf{x}|\theta) = \frac{1}{(2\theta)^n} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}{\theta}\right\}$$

per il teorema di fattorizzazione $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$.

Esercizio 3. La densità congiunta di una $Gamma(\alpha, \beta)$ è data da

$$f\left(\mathbf{x}|\alpha, \beta\right) = \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(x_i^{\alpha-1} \exp\left\{-\beta x_i\right\}\right)$$

che può essere scritta in vari modi:

i) con α noto

$$f\left(\mathbf{x}|\alpha, \beta\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} \exp\left\{n \log\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

quindi appartiene alla famiglia esponenziale ponendo $q(x_i) = x_i^{\alpha-1}$, $d(\beta) = n \log\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)$, $T(\mathbf{x}) = \sum_i x_i$ e $c(\beta) = -\beta$.

ii) con β noto

$$f\left(\mathbf{x}|\alpha, \beta\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(x_i^{-1} e^{-\beta x_i}\right) \exp\left\{n \log\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) + \alpha \sum_{i=1}^{n} \log x_i\right\}$$

dove $q(x_i) = x_i^{-1} e^{-\beta x_i}$, $d(\alpha) = n \log\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)$, $T(\mathbf{x}) = \sum_i \log x_i$, e $c(\beta) = \alpha$

iii) Possiamo scrivere la densità congiunta

$$f\left(\mathbf{x}|\alpha,\beta\right)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{-1}\exp\left\{n\log\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)+\alpha\sum_{i=1}^{n}\log x_i-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}$$

dove $q(x_i)=x_i^{-1}$, $d(\alpha,\beta)=\log\left(\beta^\alpha/\Gamma(\alpha)\right)$, $T(\mathbf{x})=\left(\sum_i\log x_i,\sum_i x_i\right)$, $c(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)$

Esercizio 4. La densità di una $Cauchy(1,\theta)$ è

$$f(x|\theta)=\frac{\pi}{1+(x-\theta)^2}$$

quindi la congiunta diventa

$$f(\mathbf{x}|\theta)=\pi^n\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+(x_i-\theta)^2\right)\right\}$$

che non può essere ricondotta alla famiglia esponenziale.