Tutorato I
15/03/2004

Esercizio 1. Sia X v.a. con funzione di densità di tipo *Weibull*:

$$f_X(x; \lambda, c) = \lambda c x^{c-1} e^{-\lambda x^c} I_{(0,\infty)}(x), \qquad \lambda, c > 0.$$

Dimostrare che se $Z = \lambda X^c$ allora

$$Z \sim Exp(1),$$

utilizzando sia la funzione di distribuzione che la funzione generatrice dei momenti.

Esercizio 2. Sia X v.a. con funzione di densità di tipo *Beta di secondo tipo*:

$$f_X(x; a, b) = \frac{1}{B(a,b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} I_{(0,\infty)}(x),$$

dove $a > 0$ e $b > 0$. Trovate la distribuzione di $Y = X/(1+X)$, utilizzando la funzione di ripartizione.

Esercizio 3. Consideriamo i due insiemi di variabili aleatorie $\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ e due insiemi di costanti $\{a_1, \ldots, a_n\}$ e $\{b_1, \ldots, b_m\}$, allora date le due combinazioni lineari

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \qquad \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j,$$

si ha che

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j Cov(X_i, Y_j)$$

Esercizio 4. Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. *iid* con varianza finita σ^2. Consideriamo la statistica campionaria

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

dove

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

è la media campionaria.
(a) Verificare che $S = \sqrt{S^2}$ è uno stimatore non corretto di σ.
(b) Supponendo che $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, trovare una rappresentazione della distorsione di S.