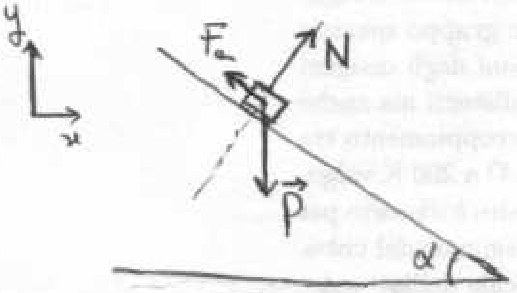
1. Un mattone scende scivolando lungo una scanalatura rettilinea, inclinata di un angolo $\alpha = 25°$ rispetto all'orizzontale, con un moto che, oltre che traslatorio e rettilineo, risulta sensibilmente uniforme. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico fra il mattone e la scanalatura.



Consideriamo il mattone come un corpo puntiforme.

Indichiamo con m la massa del mattone, con μ il coefficiente di attrito dinamico.

Se il moto risulta uniforme, allora la risultante di tutte le forze agenti deve essere nulla:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F_a} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ lungo la direzione parallela alla scanalatura:

$$P\,\text{sen}\alpha - F_a = 0 \Rightarrow mg\,\text{sen}\alpha - \mu N = 0 \qquad (1)$$

dove N è la reazione vincolare, cioè la forza d'appoggio.

lungo la direzione perpendicolare alla scanalatura:

$$-P\cos\alpha + N = 0 \Rightarrow N = P\cos\alpha = mg\cos\alpha \qquad (2).$$

Sostituendo (2) in (1):

$$mg\,\text{sen}\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow \mu = tg\,\alpha = 0{,}47,$$ indipendente dalla massa del corpo.

② Un proiettile di massa m, inizialmente in quiete, è sottoposto, per un intervallo di tempo di durata T, ad una forza $\vec{F}$ di direzione costante il cui modulo dipende dal tempo nel modo seguente:

$$F = ct(T-t) \quad , \quad 0 \le t \le T \quad , \quad c = \text{cost}.$$

Calcolare l'impulso della forza F, relativo all'intervallo di tempo in cui essa agisce, e la velocità con cui viene lanciato il proiettile alla fine di tale intervallo. Si suppone $m = 15\ g$, $T = 9 \cdot 10^{-4}\ s$ e $c = 3 \cdot 10^{10}\ \frac{N}{s^2}$.

Scegliamo come asse x la direzione di $\vec{F}$ $\Rightarrow$ lungo x

$$F = ct(T-t) \qquad . \qquad \vec{J} \equiv \text{impulso}$$

$$\vec{J} = \int_0^T F dt = c \int_0^T t(T-t)\, dt = c\left[T\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^T = c\frac{T^3}{6}$$

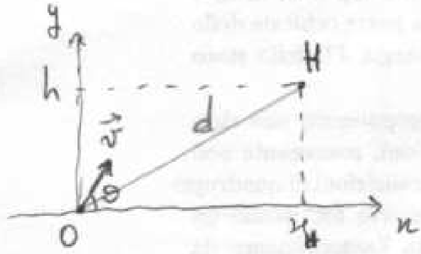
diretto lungo x. $\qquad \vec{J} = c\frac{T^3}{6} = 3{,}645\ N \cdot s$.

Per calcolare la velocità di lancio del proiettile, ~~si~~ usa il teorema dell'impulso:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \Delta\vec{p} = \int \vec{F} dt \Rightarrow m\vec{v} = \int \vec{F} dt = \vec{J} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{J}{m} = \frac{cT^3}{6m} = 243\ \frac{m}{s}$$

3. Una pallina da golf, assimilabile ad un punto materiale, di massa m, viene lanciata in aria e raggiunge la quota massima in una posizione H che si trova ad una altezza h rispetto alla posizione iniziale O e a una distanza da questa $d = |H-O|$. Supponendo trascurabile la resistenza dell'aria, determinare l'impulso della forza che la mazza da golf ha applicato alla pallina durante l'urto di lancio.



$\vec{J} = m\vec{v}$

$x_H = \sqrt{d^2 - h^2}$, $y_H = h$, $z_H = 0$

$v_x = v\cos\theta$

$v_y = v\,\mathrm{sen}\,\theta$

$x = v_x t = v\cos\theta\, t \qquad (1)$

$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 = v\,\mathrm{sen}\,\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$

Cerco t tale che y sia massimo:

$\frac{dy}{dt} = 0 = v\,\mathrm{sen}\,\theta - gt \Rightarrow t = \frac{v\,\mathrm{sen}\,\theta}{g} \qquad (3)$

Sostituendo in (2): $\frac{(v\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{(v\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}{g^2} = h \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{v^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{g} = h \Rightarrow \mathrm{sen}^2\theta = \frac{2gh}{v^2} \qquad (4)$

Sostituendo (3) in (1): $\sqrt{d^2-h^2} = \frac{v^2}{g}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \qquad (5)$

Dividendo (4) per (5) membro a membro:

$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{2h}{\sqrt{d^2-h^2}} \Rightarrow \mathrm{tg}^2\theta = \frac{4h^2}{d^2-h^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin^2\vartheta}{1-\sin^2\vartheta} = \frac{4h^2}{d^2-h^2} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\vartheta = \frac{4h^2}{d^2+3h^2}$$

Sostituendo il valore trovato per $\sin^2\vartheta$ in (4):

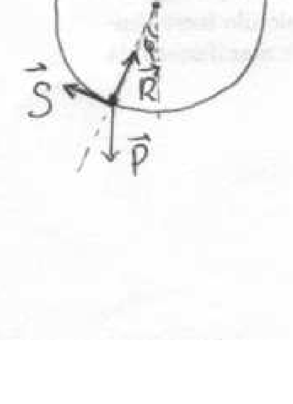
$$v^2 = \frac{2gh}{\sin^2\vartheta} = \frac{g\,(d^2+3h^2)}{2h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad J = mv = m\sqrt{\frac{g\,(d^2+3h^2)}{2h}}$$

4. Un corpo praticamente puntiforme, di peso $\vec{P}$, è vincolato a scorrere lungo una guida circolare, di raggio r, giacente in un piano verticale. Se c'è attrito fra il corpo e la guida, e il coefficiente di attrito statico è f, quali sono le posizioni di equilibrio? E qual è il massimo valore del modulo della forza d'attrito corrispondente a queste posizioni di equilibrio? Se invece si elimina l'attrito, e si collega al corpo una molla, di costante elastica k e lunghezza a riposo r, fissata nel punto più alto del diametro verticale, quali sono le posizioni di equilibrio? Sia $P = 0{,}8$ kgf, $r = 40$ cm, $f = 0{,}25$, $k = 5\ \frac{\text{kgf}}{\text{m}}$

Studiamo separatamente i due casi: ① con attrito
② senza attrito.

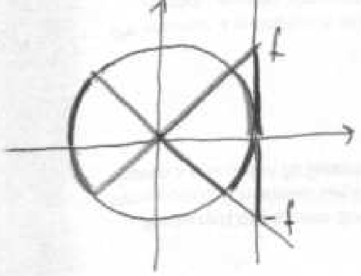
①



$$\vec{R}+\vec{S}+\vec{P}=0 \Rightarrow \vec{R} \text{ complanare con } \vec{S} \text{ e } \vec{P}$$
$$\Downarrow$$
$$R = P|\cos\varphi|, \quad S = P|\sin\varphi|$$

In condizioni di equilibrio il corpo non striscia nella guida ⇒

⇒ $S \le fR \Rightarrow p|\text{sen}\,\varphi| \le f\,p\,|\cos\varphi| \Rightarrow |\text{tg}\,\varphi| \le f$



quindi le posizioni sono tutte quelle con $-f \le \text{tg}\,\varphi \le f$, cioè

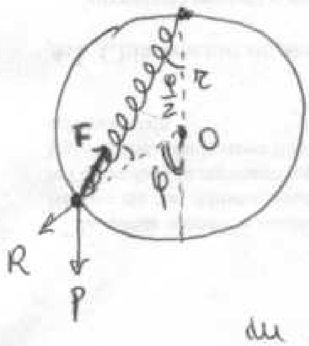
$$-14°2' \le \varphi \le 14°2' \quad \text{e}$$

$$166°2' \le \varphi \le 194°2'$$

La forza d'attrito ha valore massimo quando senφ ha valore massimo, nel qual caso:

$$S_{MAX} = p\,\text{sen}(\text{arctg}\,f) = \frac{pf}{\sqrt{1+f^2}} = 0{,}194 \text{ kgf}$$

(2)



R è la reazione vincolare normale alla guida, F è la forza elastica dovuta alla molla.

Se con l indichiamo la lunghezza della molla in una posizione generica:

$$l = 2r\cos\frac{\varphi}{2} \Rightarrow F = k\Delta x = kr\left(2\cos\frac{\varphi}{2} - 1\right)$$

$$\vec{R} + \vec{F} + \vec{P} = 0 \Rightarrow F\cos\frac{\varphi}{2} = R + p\cos\varphi \qquad (1)$$

$$F\,\text{sen}\frac{\varphi}{2} = p\,\text{sen}\,\varphi \qquad (2)$$

Dalla (2): $kr\left(2\cos\frac{\varphi}{2} - 1\right)\text{sen}\frac{\varphi}{2} = 2p\,\text{sen}\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\left[kr\left(2\cos\frac{\varphi}{2}-1\right)-2p\cos\frac{\varphi}{2}\right]$$ ammette due

soluzioni:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=0 \Rightarrow \varphi=0$$

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{kr}{2(kr-p)} \Rightarrow \varphi = 2\arccos\left[\frac{kr}{2(kr-p)}\right]$$ che

corrispondono a 3 posizioni di equilibrio:
il punto più basso del diametro verticale e due punti simmetrici rispetto ad esso e corrispondenti allo stesso valore assoluto φ_1 dell'angolo φ, con $\varphi_1 = 67° 7'$.