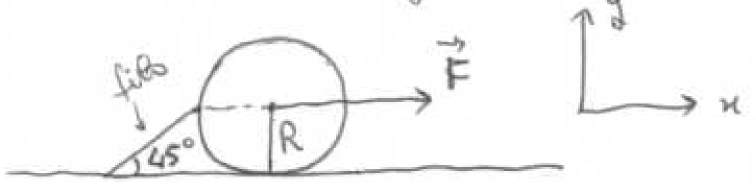
1. Un anello di massa $m = 3\,kg$, disposto verticalmente sopra un piano orizzontale, è sottoposto all'azione della forza $F = 12\,N$ ed è tenuto fermo da un filo come mostrato in figura.

1. Calcolare il valore della tensione del filo;
2. verificare che l'equilibrio è possibile.

Si recide il filo e l'anello entra in movimento.

3. Calcolare il valore minimo del coefficiente di attrito statico affinché il moto sia di puro rotolamento.



Sol. all'equilibrio statico: $\vec{R}^{(E)} = 0 \Leftrightarrow \vec{T} + \vec{P} + \vec{f} + R_N = 0$

dove $\vec{T}$ è la tensione del filo, $\vec{f}$ la forza d'attrito, $\vec{R}_N$ la reazione vincolare e $\vec{P}$ la forza peso.

lungo x: $$F - f - \frac{T}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow f = F - \frac{T}{\sqrt{2}} \qquad (1)$$

in equilibrio statico deve valere anche $\vec{M}^{(E)} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow FR - TR\sqrt{2} = 0 \Rightarrow T = \frac{F}{\sqrt{2}} = 8{,}5\,N \qquad (2)$$, che messa in (1) dà $$f = \frac{T}{\sqrt{2}} = 6\,N$$

lungo y: $$R_N - mg - \frac{T}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow R_N = mg + \frac{T}{\sqrt{2}} = 35{,}4\,N$$

$$f \leq \mu_s R_N \Rightarrow \mu_s \geq \frac{f}{R_N} = 0{,}17$$ quindi l'equilibrio è possibile.

Affinché il moto sia di puro rotolamento, $v_{CM} = \omega R$, $a_{CM} = \alpha R$

Se scelgo il centro di massa come polo, $\vec{M}^{(E)} = I_{CM}\vec{\alpha} \Rightarrow$

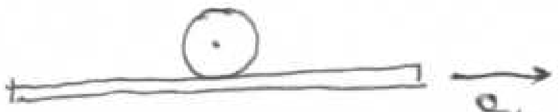
$$\Rightarrow f \cdot R = I\alpha = mR^2\alpha = mR^2\frac{a_{CM}}{R} = mR\,a_{CM} \Rightarrow f = m\,a_{CM}$$

Inoltre $\vec{R}^{(E)} = m\vec{a}_{CM} \Rightarrow \quad F - f = m a_{CM} \Rightarrow F = 2m a_{CM}$

$\Rightarrow f = \frac{F}{2}$ Poiché $f \le \mu_s m g \Rightarrow \frac{F}{2} \le \mu_s m g \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_s \geq \frac{F}{2mg} = 0{,}2$

2. Una piattaforma avanza con accelerazione $a_t = 3\,\frac{m}{s^2}$. Su di essa è poggiato un cilindro di massa m e raggio r. Nell'ipotesi che il cilindro rotoli senza strisciare sulla piattaforma calcolare:
1) l'accelerazione a del cilindro rispetto al suolo;
2) l'accelerazione a_r del cilindro rispetto alla piattaforma;
3) il valore minimo del coefficiente di attrito statico.



Sol.: moto di puro rotolamento $\Rightarrow a_{CM} = -\alpha r$

In questo caso $a_{CM} = a_r \Rightarrow a_r = -\alpha r$

$a = a_t + a_r$

L'unica forza che agisce sul cilindro in direzione orizzontale è f di attrito $\Rightarrow \quad f = ma$

$$f \cdot r = I\alpha = I\left(-\frac{a_r}{r}\right) = \frac{I}{r}\cdot(a_t - a) \Rightarrow$$

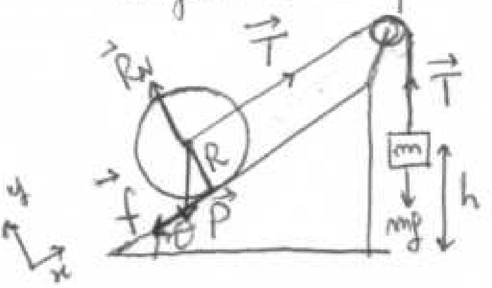
$$\Rightarrow m a r = \frac{I}{r}(a_t - a) \Rightarrow \quad m a r^2 = \frac{1}{2} m r^2 (a_t - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{a_t}{3} = 1\,\frac{m}{s^2} \quad , \quad a_r = -\frac{2}{3}a_t = -2\,\frac{m}{s^2}$$

$$f = ma \le \mu_s m g \Rightarrow \mu_s \geq \frac{a}{g} = \frac{a_t}{3g} = 0{,}1$$

3. Un disco $M = 8$ kg e raggio R è posto sopra una guida inclinata con angolo $\theta = 30°$; all'asse del disco è collegato un filo che sostiene la massa $m = 6$ kg. Il filo è teso con la massa m bloccata a distanza $h = 1{,}5$ m dal suolo. All'istante $t = 0$ si lascia libera m, che inizia a scendere, facendo contemporaneamente salire il disco lungo la guida. Il moto del disco è di puro rotolamento. Calcolare:

1) l'accelerazione con cui scende la massa m;
2) la velocità con cui m tocca il suolo;
3) la quota massima raggiunta dal centro del disco, misurata rispetto alla quota che lo stesso centro aveva per $t = 0$.



Sul moto del CM del disco:

$$\vec{R}^{(E)} = M\vec{a}_{CM} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{P}}_{\text{peso}} + \underbrace{\vec{f}}_{\text{attrito}} + \underbrace{\vec{R}_N}_{\text{reazione vincolare}} + \underbrace{\vec{T}}_{\text{tensione}} = M\vec{a}_{CM}$$

<u>lungo y</u>: $\quad -P\cos\theta + R_N = 0 \Rightarrow R_N = P\cos\theta = Mg\cos\theta \quad (1)$

<u>lungo x</u>: $\quad -P\sin\theta - f + T = Ma_{CM} \quad (2)$

$$\vec{M}^{(E)} = I_{CM}\vec{\alpha} \Rightarrow fR = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a_{CM}}{R} \Rightarrow f = \frac{1}{2}Ma_{CM} \quad (3)$$

moto della massa m: $\quad \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Rightarrow -mg + T = -ma \Rightarrow$

$\Rightarrow T = mg - ma \quad (4)$. Poiché la corda è tesa, $a_{CM} = a$

$\Rightarrow$ in (2): $\quad -Mg\sin\theta - f + T = Ma \quad$ e inserendo (3) e (4):

$$-Mg\sin\theta - \frac{1}{2}Ma + mg - ma = Ma \Rightarrow \frac{3}{2}Ma + ma = -Mg\sin\theta + mg$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}M + m\right)a = mg - Mg\sin\theta \Rightarrow a = \frac{g(m - M\sin\theta)}{\frac{3}{2}M + m} = 1{,}09\ \frac{m}{s^2}$$

Il moto è uniformemente accelerato, quindi la velocità con cui m arriva al suolo è $v_m = at$ dopo aver percorso lo spazio $h = \frac{1}{2}at^2$ $\Rightarrow$ $h = \frac{1}{2}a\frac{v_m^2}{a^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{v_m^2}{a}$ $\Rightarrow$ $v_m = \sqrt{2ah} = 1{,}81\ \frac{m}{s}$

Nel momento in cui m tocca terra, il filo non è più teso e la velocità del disco M è $v_M = v_m$.
L'energia si conserva perché agisce in un punto del disco che è istantaneamente fermo, per cui lo spostamento è nullo, quindi il lavoro della forza d'attrito è nullo.

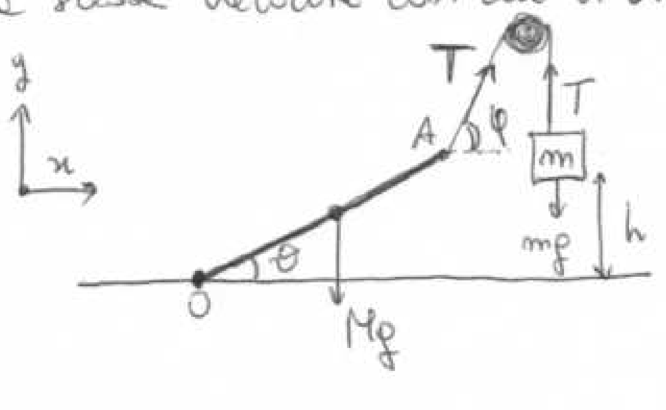
$$E_{m1} = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_M^2}{R^2} = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\frac{v_M^2}{R^2} =$$

$$= \frac{3}{4}Mv_M^2\ ; \qquad E_{m2} = Mgh_M \Rightarrow E_{m1} = E_{m2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}Mv_M^2 = Mgh_M \Rightarrow h_M = \frac{3}{4}\frac{v_M^2}{g} = 0{,}25\ m.$$

$$h_{tot} = h\,\mathrm{sen}\,\vartheta + h_M = 1\ m.$$

4. Un'asta, lunga $l = OA = 1m$ e di massa $M = 10kg$, è incernierata nel punto O; tramite un filo e una carrucola l'estremo A è connesso a un corpo di massa m. Il sistema è in equilibrio e i valori degli angoli sono $\vartheta = 30°$ e $\varphi = 75°$.
1) Calcolare il valore di m e modulo, direzione e verso della reazione vincolare in O.
Ad un certo istante il filo viene tagliato.
2) Calcolare quanto deve valere h affinché il corpo m arrivi al suolo con la stessa velocità con cui vi arriva il punto A dell'asta.



Rispetto al polo O: $I_O = I_{CM} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}M\ell^2$ per il teo. di Huygens-Steiner

equilibrio della massa m: $\vec{T} + m\vec{g} = 0 \Rightarrow T - mg = 0 \Rightarrow T = mg$

equilibrio dell'asta: $\vec{T} + M\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$, $\vec{R}$ = reazione vincolare

lungo x: $T\cos\varphi - R_x = 0 \Rightarrow R_x = -T\cos\varphi = -mg\cos\varphi$

lungo y: $T\,\text{sen}\varphi - Mg + R_y = 0 \Rightarrow R_y = Mg - T\,\text{sen}\varphi = Mg - mg\,\text{sen}\varphi$

equilibrio dei momenti: consideriamo le componenti di T lungo x e y e i corrispondenti momenti. Scegliamo come asse z positivo quello con verso uscente dal piano del foglio.

$\vec{M}^{(E)} = 0 \Rightarrow Mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta - T\,\text{sen}\varphi\cdot\ell\cos\vartheta + T\cos\varphi\,\ell\,\text{sen}\vartheta = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta - T\ell(\cos\vartheta\,\text{sen}\varphi - \text{sen}\vartheta\cos\varphi) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta - T\ell\,\text{sen}(\varphi-\vartheta) = 0 \Rightarrow Mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta - mg\,\ell\,\text{sen}(\varphi-\vartheta) = 0$

$\Rightarrow m = \frac{M}{2}\frac{\cos\vartheta}{\text{sen}(\varphi-\vartheta)} = \frac{M}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{M}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = 6{,}12\ \text{kg}$

$R_x = -mg\cos\varphi$, $R_y = Mg - mg\,\text{sen}\varphi$, $R_x = -15{,}5\ \text{N}$, $R_y = 40{,}1\ \text{N}$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = g\left(m^2 + M^2 - 2mM\,\text{sen}\varphi\right)^{1/2} = 43\ \text{N}$

$\vec{R}$ è diretta in alto a sinistra e forma con l'asse x un angolo β t.c.

$\text{tg}\beta = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \beta = 68{,}8°$

Dopo aver tagliato il filo, si conserva l'energia sia della massa m che dell'asta: $mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$

$Mg\frac{\ell}{2}\text{sen}\vartheta = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}M\ell^2\cdot\frac{v_A^2}{\ell^2} \Rightarrow Mg\ell\,\text{sen}\vartheta = \frac{1}{3}Mv_A^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_A = \sqrt{3g\ell\,\text{sen}\vartheta} \Rightarrow v_A = v \Leftrightarrow 2gh = 3g\ell\,\text{sen}\vartheta \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{3}{2}\ell\,\text{sen}\vartheta = 0{,}75\ \text{m}.$