1. Un corpo rigido, omogeneo, pesante, è appoggiato con attrito su una guida rettilinea inclinata di un angolo $\alpha = 20°$ rispetto all'orizzontale e viene abbandonato in quiete in una certa posizione iniziale. Il corpo comincia a rotolare (senza strisciare). Studiare il moto del ~~corpo~~ centro di massa G nei casi in cui il corpo omogeneo ha le seguenti forme: 1) sfera; 2) disco; 3) anello. In particolare calcolare il tempo impiegato da G per arrivare a una distanza $x = 170$ cm dalla posizione iniziale, nonché la velocità e l'accelerazione con cui arriva. Calcolare inoltre il rapporto fra i moduli della forza d'attrito e del peso.

Sol.

Indichiamo con r il raggio del corpo e con m la sua massa. Il centro di massa G coincide con il centro di simmetria e, a causa del vincolo, si muove lungo una retta parallela alla guida.

Le forze agenti sul corpo sono: la forza peso, la reazione vincolare d'appoggio $\vec R$ (normale alla guida) e quella d'attrito $\vec S$ (parallela alla guida).

<u>1ª equazione cardinale della dinamica</u>: $\vec R^{(E)} = m\vec a_{CM} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad m a_G = mg \sin\alpha - S \qquad (1)$$

<u>2ª equazione cardinale della dinamica</u>: $\vec M^{(E)} = I_{CM} \cdot \vec\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad I_G \cdot \ddot\varphi = S r, \quad (2)$ essendo φ l'angolo che misura le rotazioni e I_G il momento d'inerzia rispetto alla retta passante per G e perpendicolare all'asse x.

Sappiamo che $I_G = \frac{2}{5} m r^2$ per la sfera, $I_G = \frac{1}{2} m r^2$ per il disco e $I_G = m r^2$ per l'anello. Per comodità scriviamo $I_G = m\delta^2$, in modo da trattare il caso generale.

da (2) si ricava $S = \frac{I_G}{r}\ddot{\varphi} = \frac{I_G}{r}\ddot{\varphi} = m\frac{\delta^2}{r}\ddot{\varphi}$ e

sostituendo in (1) si ha: $m a_G = mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - m\frac{\delta^2}{r}\ddot{\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_G = \ddot{x}_G), \quad \ddot{x}_G + \frac{\delta^2}{r}\ddot{\varphi} = g\,\mathrm{sen}\,\alpha$.

Dalle condizione di rotolamento puro, un generico spostamento di G della primitiva iniziale ha lunghezza x_G uguale a quella dell'arco il cui angolo al centro è φ, cioè:

$x_G = r\varphi, \quad \dot{x}_G = r\dot{\varphi}, \quad \ddot{x}_G = r\ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_G}{r}$

$$\Rightarrow \ddot{x}_G + \frac{\delta^2}{r}\cdot\frac{\ddot{x}_G}{r} = g\,\mathrm{sen}\,\alpha \Rightarrow \ddot{x}_G + \left(\frac{\delta}{r}\right)^2\ddot{x}_G = g\,\mathrm{sen}\,\alpha \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ddot{x}_G = \dfrac{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{1+\left(\frac{\delta}{r}\right)^2} \Rightarrow$ il moto di G è uniformemente accelerato.

$a_G = \ddot{x}_G \Rightarrow v_G = \dot{x}_G = a_G t, \quad x_G = \frac{1}{2}a_G t^2$

Il tempo impiegato dal corpo per percorrere la distanza x è $t = \sqrt{\frac{2x}{a_G}}$ e il modulo della velocità finale è $v = \sqrt{2a_G x}$.

La forza d'attrito è data da: $S = \frac{\delta^2}{r}m\ddot{\varphi} = \frac{\delta^2}{r}m\frac{\ddot{x}_G}{r} = \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 m\ddot{x}_G$

$$= m\left(\frac{\delta}{r}\right)^2\cdot\frac{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{1+\left(\frac{\delta}{r}\right)^2} = \frac{mg\,\mathrm{sen}\,\alpha}{1+\left(\frac{r}{\delta}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S}{mg} = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{1+\left(\frac{r}{\delta}\right)^2}.$$

Quindi nel caso della sfera si ha: $\delta^2 = \frac{2}{5}r^2 \Rightarrow a = \frac{5}{7}g\,\mathrm{sen}\,\alpha = 2{,}39\frac{m}{s^2}$

$t_1 = \sqrt{\frac{14}{5}\frac{x}{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}} = 1{,}19\ s, \quad v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}g x\,\mathrm{sen}\,\alpha} = 2{,}85\ \frac{m}{s}; \ \frac{S}{mg} = 0{,}09$

Per il disco $\delta^2 = \frac{1}{2} r^2 \Rightarrow a = \frac{2}{3} g \,\mathrm{sen}\,\alpha = 2,23 \ \frac{m}{s^2}$

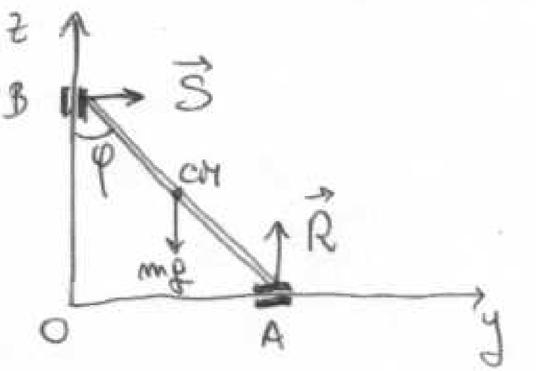
$t = \sqrt{\frac{3x}{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}} = 1,23 \ s$, $\quad v = \sqrt{\frac{4}{3} g x \,\mathrm{sen}\,\alpha} = 2,76 \ \frac{m}{s}$,

$\frac{S}{mg} = \frac{1}{3} \,\mathrm{sen}\,\alpha = 0,114$

Per l'anello $\delta^2 = r^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} g \,\mathrm{sen}\,\alpha = 1,68 \ \frac{m}{s^2}$

$t = \sqrt{\frac{4x}{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}} = 1,42 \ s$, $\quad v = \sqrt{g x \,\mathrm{sen}\,\alpha} = 2,39 \ \frac{m}{s}$, $\quad \frac{S}{mg} = \frac{1}{2} \,\mathrm{sen}\,\alpha = 0,1$

2. Un'asta rigida omogenea, di massa m, lunghezza $2l$, ha gli estremi A e B vincolati a scorrere, senza attrito, lungo due guide rettilinee fisse, che partono dal punto comune O, l'una orizzontale, l'altra verticale ascendente. Sia φ il generico angolo che l'asta forma con la verticale. L'asta è abbandonata in quiete nella configurazione in cui $\varphi = \varphi_0$: studiare il moto successivo, in particolare esprimere sia l'accelerazione angolare che la velocità angolare in funzione di φ. Esprimere inoltre, in funzione di φ, le due forze vincolari applicate in A e in B.



Le forze agenti sull'asta sono: la forza peso, la forza vincolare $\vec{R}$ applicata in A e quella $\vec{S}$ applicata in B. Poiché non c'è attrito $\vec{R}$ ed $\vec{S}$ sono ortogonali rispettivamente agli assi y e z.

La velocità angolare $\vec{\omega}$ è diretta sempre lungo x: $\omega = \dot{\varphi}$

Equazioni cardinali della dinamica:

(1) $\quad \vec{R}^{(E)} = m\vec{a}_{CM}$

(2) $\quad \vec{M}^{(E)} = I_{CM}\,\alpha = I_{CM}\,\dot{\omega} = I_{CM}\,\ddot{\varphi}$

La (1) dà: lungo z: $R - mg = m\ddot{z}_{cm}$ (3)

lungo y: $S = m\ddot{y}_{cm}$ (4)

Dalla (2): lungo x: $R\ell \,\text{sen}\varphi - S\ell\cos\varphi = \frac{1}{3} m\ell^2\ddot{\varphi}$ (5)

Esprimiamo le coordinate del CM rispetto a φ:

$$\begin{cases} y_{cm} = \ell\,\text{sen}\varphi \\ z_{cm} = \ell\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \text{derivando rispetto al tempo: } \begin{cases} \dot{y}_{cm} = \ell\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z}_{cm} = -\ell\dot{\varphi}\,\text{sen}\varphi \end{cases}$$

derivando ancora: $\begin{cases} \ddot{y}_{cm} = \ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - \ell\dot{\varphi}^2\,\text{sen}\varphi \\ \ddot{z}_{cm} = -\ell\ddot{\varphi}\,\text{sen}\varphi - \ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{cases}$ e sostituite in

(3) e (4) otteniamo: $R = mg - m\ell(\ddot{\varphi}\,\text{sen}\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$

$S = m\ell(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\text{sen}\varphi)$, che inserite in (5) danno:

$$[mg - m\ell(\ddot{\varphi}\,\text{sen}\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)]\ell\,\text{sen}\varphi - m\ell(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\text{sen}\varphi)\ell\cos\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg\ell\,\text{sen}\varphi - m\ell^2\ddot{\varphi}\,\text{sen}^2\varphi - m\ell^2\dot{\varphi}^2\,\text{sen}\varphi\cos\varphi - m\ell^2\ddot{\varphi}\cos^2\varphi +$$
$$+ m\ell^2\dot{\varphi}^2\,\text{sen}\varphi\cos\varphi = \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg\ell\,\text{sen}\varphi - m\ell^2\ddot{\varphi} = \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} \Rightarrow \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} = mg\ell\,\text{sen}\varphi$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{3}{4}\frac{g}{\ell}\,\text{sen}\varphi$$

Per trovare la velocità angolare ω devo trovare $\dot{\varphi}$, integrando $\ddot{\varphi}$ rispetto al tempo. Se moltiplico entrambi i membri di

$\ddot{\varphi} = \frac{3}{4}\frac{g}{\ell}\,\text{sen}\varphi$ per $2\dot{\varphi}$, trovo $2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{3}{4}\,g/\ell\, 2\dot{\varphi}\,\text{sen}\varphi$

che equivale a $\frac{d}{dt}(\dot\varphi^2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}(-\cos\varphi)\right)$, che integrata dà:

$$\dot\varphi^2 = -\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\varphi + \text{cost.}$$

Le condizioni iniziali $\varphi(0)=0$ e $\dot\varphi(0)=0$ permettono di determinare la costante:

$$\dot\varphi(0)=0 \Rightarrow \dot\varphi^2(0) = 0 = -\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\varphi_0 + \text{cost.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{cost.} = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\varphi_0 \Rightarrow \dot\varphi = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}$$ che

è l'espressione cercata per la velocità angolare.

Dalle espressioni ottenute per $\dot\varphi$ e $\ddot\varphi$ ricaviamo R e S:

$$R = mg - m\ell\left(\frac{3}{4}\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}^2\varphi + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\varphi_0\cos\varphi - \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos^2\varphi\right) =$$

$$= mg - m\left(\frac{3}{4}g - \frac{3}{4}g\cos^2\varphi + \frac{3}{2}g\cos\varphi\cos\varphi_0 - \frac{3}{2}g\cos^2\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{4}mg\left(1 - 6\cos\varphi_0 + 9\cos^2\varphi\right)$$

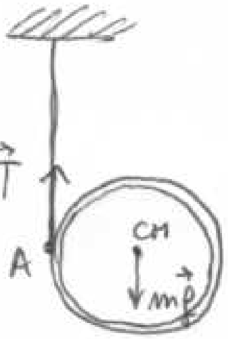
$$S = m\ell\left(\frac{3}{4}\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \left(-\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\varphi_0 + \frac{3}{2}g/\ell\cos\varphi\right)\operatorname{sen}\varphi\right) =$$

$$= mg\left(\frac{3}{4}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \frac{3}{2}\cos\varphi_0\operatorname{sen}\varphi + \frac{3}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right) =$$

$$= \frac{3}{4}mg\operatorname{sen}\varphi\left(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0\right)$$

$R > 0$ sempre, quindi è sempre verticale ascendente, mentre S ha in un primo tempo lo stesso verso dell'asse y, poi contrario.

3. Un anello sottile, rigido, omogeneo, di massa $m = 0{,}7$ kg, giace in un piano verticale. Una corda flessibile, inestendibile e di massa trascurabile ha un estremo collegato all'anello, è avvolta per molti giri sul suo bordo esterno, poi, dopo un tratto verticale, è collegata ad un supporto fisso sopra l'anello. Si abbandona l'anello inizialmente in quiete con la corda tesa: studiare il moto successivo, finché la corda non si è completamente srotolata. Determinare inoltre la tensione della corda durante tale moto.



Sia r il raggio noto della circonferenza -
Forze agenti sul sistema: forza peso $m\vec{g}$ e tensione della corda di modulo T, applicata nel punto A. $\vec{P} = m\vec{g}$ è applicata nel CM.

Applichiamo le equazioni cardinali: $mg - T = m a_{CM}$ (1)

e $Tr = I_{CM}\,\omega = m r^2 \ddot{\varphi} \Rightarrow T = m r \ddot{\varphi}$ (2)

Il punto A è istantaneamente fermo, perché non si sposta orizzontalmente, ma neppure verticalmente perché la corda è tesa e inestendibile.

$\underline{v}_{CM} = \underline{\omega} \wedge \vec{CA} \Rightarrow v_{CM} = \omega r = \dot{\varphi} r$ Il moto di CM è rettilineo. Da $v_{CM} = r\dot{\varphi} \Rightarrow a_{CM} = r\ddot{\varphi} \Rightarrow$ da (1)

$\Rightarrow mg - T = m r \ddot{\varphi}$ e usando (2) $\Rightarrow T = m a_{CM}$

$\Rightarrow mg - m r \ddot{\varphi} = m r \ddot{\varphi} \Rightarrow mg = 2 m r \ddot{\varphi} = 2 m a_{CM} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{CM} = \frac{g}{2} = 4{,}9 \ \frac{m}{s^2} \Rightarrow T = \frac{mg}{2} = 3{,}43$ N

Il moto di CM è rettilineo uniformemente accelerato. Il moto dell'anello è un rotolamento puro.