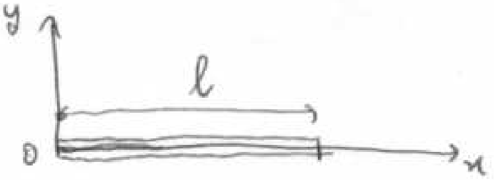
1. Trovare la posizione del CM di una sbarra omogenea di massa M e lunghezza l.

densità della sbarra: $\lambda = \frac{M}{l}$

$$x_C = \frac{\int_0^l x \lambda dx}{M} = \frac{M}{l}\frac{\int_0^l x\, dx}{M} = \frac{1}{l}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^l = \frac{l}{2}$$

Trovare la posizione del CM di una sbarretta rettilinea non omogenea di lunghezza l = 20 cm, la cui densità lineare $\lambda(x)$ abbia l'espressione $\lambda(x) = a - bx$ $\left(a = 0{,}3\ g/cm\ ;\ b = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \frac{g}{cm^2}\right)$.



$$x_C = \frac{\int_0^l x \lambda dx}{M} = \frac{\int_0^l x \lambda dx}{\int_0^l \lambda dx} =$$

$$= \frac{\int_0^l x(a-bx)dx}{\int_0^l (a-bx)dx} = \frac{\left[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}bx^3\right]_0^l}{\left[ax - \frac{bx^2}{2}\right]_0^l} = \frac{\frac{1}{2}al^2 - \frac{1}{3}bl^3}{al - \frac{bl^2}{2}} = 8{,}3\ cm$$

2. Una mola S di massa M = 10 kg ruota intorno al suo asse a una frequenza ν = 6000 giri/min. A causa di difetti di costruzione, il centro di massa C della mola non giace esattamente al centro A dell'asse di rotazione, ma è spostato rispetto a esso di un tratto δ = 1,5 mm. Trovare l'intensità della forza T_a che si esercita sull'asse.

Sol.: Le forze esterne che si esercitano sulla mola sono la forza peso $M\vec{g}$ e la forza $\vec{T}_m$ che su di essa esercita l'asse.
Per il teorema del centro di massa sappiamo che $\vec{R}^{(E)} = m\vec{a}_{CM}$

quindi in questo caso $M\vec{g} + \vec{T}_m = M\vec{a}_{CM}$, da cui $-\vec{T}_m = M\vec{g} - M\vec{a}_{CM}$. Per il principio di azione e reazione,

$$\vec{T}_e = -\vec{T}_m \Rightarrow \vec{T}_e = M\vec{g} - M\vec{a}_{CM}.$$

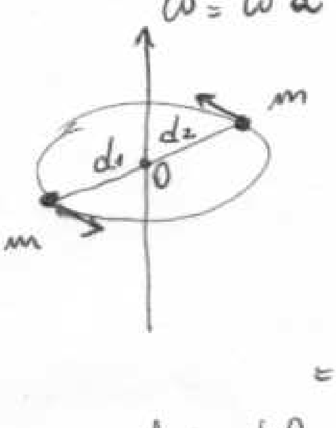
Poiché il moto del CM è circolare uniforme, la sua accelerazione è centripeta e vale $\vec{a}_{CM} = -\omega^2\vec{\delta}$.

Nel nostro caso $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 6{,}28 \cdot 100 \ \frac{1}{s} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega^2\delta = 6\cdot10^2 \ \frac{m}{s^2}.$$

$$T_e = Mg + M\omega^2\delta \simeq 6\cdot10^3 \ N$$

3. Si consideri un manubrio costituito da due masse uguali collegate da una sbarretta di massa trascurabile di lunghezza $2d$. Supponiamo che inizialmente esso ruoti liberamente intorno a un asse ortogonale al centro della sbarretta con velocità angolare ω. Se in virtù di forze interne le due masse vengono portate a distanza $d' = \frac{d}{2}$, si conserva l'energia cinetica?



Ognuna delle due masse compie un moto circolare con velocità di modulo $v = \omega d$. Il momento angolare $\vec{L}$ del sistema rispetto al polo O è

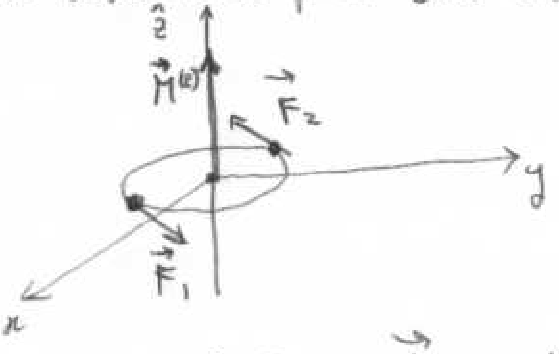
$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{d}_1 \wedge m\vec{v}_1 + \vec{d}_2 \wedge m\vec{v}_2 = 2dmv\,\hat{a} =$$

$$= 2dm\omega d\,\hat{a} = 2md^2\vec{\omega}.$$

Quindi fissata la geometria del sistema il momento angolare è proporzionale alla velocità angolare $\vec{\omega}$. Pertanto se vogliamo cambiare la velocità angolare $\vec{\omega}$ dobbiamo cambiare $\vec{L}$ e dunque deve essere $\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0$.

Per il teorema del momento angolare $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$, ciò richiede che si applichino delle forze esterne con momento risultante $\vec{M}^{(E)} \neq 0$.

Se per semplicità supponiamo di non voler far muovere il punto O (cioè il CM), deve trattarsi di un sistema di forze con risultante $\vec{R}^{(E)} = 0$, ovvero una coppia:



Se vogliamo modificare il modulo di $\vec{\omega}$ (cioè il modulo di $\vec{L}$) ma non la sua direzione, allora $\frac{d\vec{L}}{dt}$ deve essere parallelo a $\vec{L}$ e dunque deve esserlo anche $\vec{M}^{(E)}$. Se invece vogliamo cambiare la direzione di $\vec{L}$, senza cambiarne il modulo, allora $\frac{d\vec{L}}{dt}$ deve essere ortogonale a $\vec{L}$: anche $\vec{M}^{(E)}$ deve essere ortogonale all'asse.

Tornando al nostro problema, il sistema è isolato e dunque $\vec{M}^{(E)} = 0$. Se non si modificasse la geometria del sistema sarebbe $\vec{\omega} = \text{cost}$.
Nel nostro caso esistono forze interne che modificano la geometria poiché $d' = \frac{d}{2}$, quindi si dimezza la lunghezza delle barrette.

Nella configurazione finale, $\vec{L}' = 2md'^2\vec{\omega}$. D'altra parte, poiché il cambiamento di configurazione è avvenuto in virtù di sole forze interne, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ e il momento angolare deve essere conservato: $\vec{L} = \vec{L}' \Rightarrow 2md^2\vec{\omega} = 2md'^2\vec{\omega}' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\omega}' = \vec{\omega}\left(\frac{d}{d'}\right)^2 = 4\vec{\omega}.$$

Questo effetto viene per esempio sfruttato da un pattinatore.
L'energia cinetica iniziale era: $E_{c1} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv^2 = md^2\omega^2$
quella finale è: $E_{c2} = 2\left(\frac{1}{2}mv'^2\right) = m(\omega' d')^2 = 4md^2\omega^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow E_{c2} = 4E_{c1}$. Le forze interne hanno compiuto lavoro.

4. Su un piano orizzontale privo di attrito sono posti due blocchi di masse $M_1 = 2$ kg e $M_2 = 3$ kg. Tra i due blocchi, inizialmente fermi, è sistemata una molla, di massa trascurabile, mantenuta compressa da un corto filo di collegamento tra i blocchi. Ad un certo istante il filo viene tagliato e i due blocchi vengono messi in moto dalla molla. Si osserva che la velocità raggiunta dalla massa M_1 è $v_1 = 0,5$ m/s. Qual è l'energia elastica della molla nella sua configurazione iniziale?

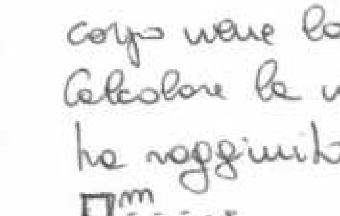
$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{M_1}{M_2} v_1 =$$

$$= 0,33 \ \frac{m}{s}$$

$$E_C = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = 0,42 \ \text{J}$$

$$\Delta E_{molla} = \Delta E_C = 0,42 \ \text{J}$$

5. Un cuneo di massa $M = 2$ kg, la cui sezione è delimitata da un quarto di cerchio di raggio $R = 59$ cm, è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Un corpo A, di massa $m = 0,5$ kg, inizialmente tenuto fermo alla sommità del cuneo, può scivolare senza attrito sul profilo circolare del cuneo stesso. Inizialmente il sistema cuneo + corpo è fermo rispetto al piano orizzontale; poi il corpo viene lasciato libero e scivola lungo il profilo del cuneo. Calcolare la velocità V con cui arretra il cuneo, quando il corpo A ha raggiunto il piano orizzontale.



Conservazione dell'energia meccanica:

$$mgR = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

Conservazione della quantità di moto totale $\quad MV + mv = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{M}{m} V \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow mgR = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m \frac{M^2}{m^2} V^2 = \frac{1}{2} M V^2 \left(1 + \frac{M}{m}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{2mgR}{M\left(1 + \frac{M}{m}\right)} \quad \Rightarrow \quad V = 0,76 \ \frac{m}{s}$$