1. Un corpo omogeneo di densità $\rho_c = 0{,}9\ g/_{cm^3}$ è immerso in acqua, la cui densità è $\rho_L = 1\ g/_{cm^3}$. Quale frazione del volume totale del corpo, all'equilibrio, emerge dall'acqua?

Sol.: L'equilibrio si raggiunge quando la spinta di Archimede F_A uguaglia la forza peso complessiva del corpo. (P_c)
Per quanto riguarda la F_A, consideriamo trascurabile l'effetto dell'aria sulla parte emersa.
Indichiamo con V_e il volume della parte emergente e con V_i quello della parte immersa. Si ha:

$$F_A = \rho_L g V_i \quad , \quad P_c = \rho_c (V_i + V_e) g$$

all'equilibrio: $\rho_c (V_i + V_e) g = \rho_L V_i g$, da cui

$$\frac{V_i + V_e}{V_i} = 1 + \frac{V_e}{V_i} = \frac{\rho_L}{\rho_c} \Rightarrow \frac{V_e}{V_i} = \frac{\rho_L - \rho_c}{\rho_c}$$

La frazione emergente è $\frac{V_e}{V_i + V_e}$ che riscriviamo in termini di $\frac{V_e}{V_i}$

$$\frac{V_e}{V_i + V_e} = \frac{V_e / V_i}{1 + \frac{V_e}{V_i}} = \frac{\rho_L - \rho_c}{\rho_c} \Big/ \left(1 + \frac{\rho_L - \rho_c}{\rho_c}\right) = \frac{\rho_L - \rho_c}{\rho_L} = 0{,}11 = 11\%$$

Oss. I dati del problema sono molto simili al caso di un blocco di ghiaccio (iceberg) immerso in acqua. La punta emergente dell'iceberg è dunque poco più del 10% del totale.

3. Un tubo a U è costituito come in fig. I due rami hanno uguale sezione S, aperta verso l'esterno; inizialmente il rubinetto R è chiuso e uno dei due rami contiene un liquido reale e omogeneo, di densità ρ per un'altezza h, mentre l'altro ramo è vuoto. Ad un certo istante R viene aperto e, dopo una fase di oscillazioni smorzate, il liquido raggiunge la situazione di equilibrio occupando i due rami del tubo. Qual è il lavoro complessivo delle forze d'attrito? Di quanto varia la lettura di pressione del manometro, passando dallo stato iniziale al fin

Sol.: $W = -\Delta E_p$

$$E_{p\,in} = \rho V g \frac{h}{2}, \quad E_{p\,fin} = 2 \cdot \rho \frac{V}{2} g \frac{h}{4} = \rho g \frac{Vh}{4}$$

$$\Rightarrow W = -\rho g V \frac{h}{4} = -\rho g\, Sh \cdot \frac{h}{4} = -\rho g \frac{Sh^2}{4}$$

$$p_{in} = p_0 + \rho g h \quad , \quad p_{fin} = p_0 + \rho g \frac{h}{2} \Rightarrow \Delta p = \rho g \frac{h}{2}$$

4. Un recipiente cilindrico di base A è riempito di un liquido perfetto per un'altezza h. Alla base del cilindro è praticato un foro di area $a = \frac{3}{10} A$, dal quale il liquido fuoriesce. Calcolare la velocità di efflusso del liquido e determinare l'errore percentuale che si commette considerando praticamente ferma la superficie libera del liquido nel recipiente.

Sol.: per Bernoulli: $p_0 + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_e^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} v_A^2 + \rho g h = \frac{1}{2} v_e^2$. La conservazione del flusso dà

$$\phi_A = v_A A \quad , \phi_e = v_e \cdot a \quad , \quad \phi_A = \phi_e \Rightarrow v_A A = v_e a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_A = v_e \cdot \frac{a}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{A^2} v_e^2 + \rho g h = \frac{1}{2} v_e^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_e^2 \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) = 2gh \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{a^2}{A^2}}} .$$

Trascurare la velocità della superficie A vuol dire $v_A \sim 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_e \simeq \sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta v_e}{v_e} = \frac{\sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{a^2}{A^2}}} - \sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}} \simeq 5\%$$

5. Le trasmissioni via satellite di programmi televisivi intercontinentali avvengono tramite satelliti orbitanti sul piano equatoriale della Terra. Il moto di questo satellite è geostazionario. Sapendo che il periodo di rivoluzione della Luna è circa 27 giorni e che la distanza tra la Terra (centro) e la Luna è circa 380.000 km, e supponendo che tutte le orbite che intervengono nel problema sono circolari con centro nel centro della Terra, calcolare il raggio R_s dell'orbita del satellite artificiale.

Sol.: terza legge di Keplero: $\frac{r^3}{T^2} = cost. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{r_L^3}{T_L^2} = \frac{R_S^3}{T_S^2} \Rightarrow R_S = r_L \left(\frac{T_S}{T_L}\right)^{\frac{2}{3}} = 4{,}2 \cdot 10^4 \text{ km}$$

6. Inizialmente un satellite artificiale di massa $m = 1000$ kg è posto in orbita circolare intorno alla Terra a quota $z_{in} = 5000$ km rispetto al livello del mare. La presenza di atmosfera produce un leggero frenamento che, con lenta spiralizzazione, porta il satellite a un'orbita ancora approssimativamente circolare a quota $z_f = 600$ km. Di quanto varia l'energia cinetica del satellite sapendo che il raggio terrestre $R_T = 6400$ km e l'accelerazione di gravità $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$?

Sol.: Inizialmente $F_G = F_C \Rightarrow G\frac{mM}{d_{in}^2} = \frac{m v_{in}^2}{d_{in}}$

con d_{in} = distanza iniziale del sat. dalla Terra. $\Rightarrow$ $v_{in} = \sqrt{\frac{GM}{d_{in}}}$

Alla fine $v_{fin} = \sqrt{\frac{GM}{d_{fin}}} \Rightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2}m\left(v_{fin}^2 - v_{in}^2\right) =$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{d_{fin}} - \frac{GM}{d_{in}}\right) \quad ; \quad mg = m\frac{MG}{R_T^2} \Rightarrow MG = gR_T^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2}mgR_T^2\left(\frac{1}{R_T + z_f} - \frac{1}{R_T + z_{in}}\right) = 1{,}1 \cdot 10^{10} \text{ J}$$