AM2: Tracce delle lezioni- XII Settimana

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

DIPENDENZA CONTINUA

Sia $f \in C((t_0-\delta, t_0+\delta)\times I)$, I intervallo (aperto o chiuso, limitato od illimitato). Supponiamo (ipotesi di **equidominatezza**)

$\exists\ g$ integrabile in $I: \ |f(t,x| \le g(x) \quad \forall t, x.$ Allora

$$t \to \int_I f(t,x)\,dx \quad \text{é continua in} \quad (t_0-\delta, t_0+\delta)$$

Prova. Grazie ad Heine-Cantor, $t_n \to t \Rightarrow f_n(x) := f(t_n, x)$ converge uniformemente sui sottoinsiemi chiusi e limitati di I. Ció, insieme alla equidominatezza, assicura che $\int_I f(t_n,x)\,dx \to \int_I f(t,x)\,dx$.

NOTA Se I é chiuso e limitato l'ipotesi di equidominatezza é automaticamente soddisfatta.

DERIVAZIONE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE.

Sia $f \in C((t_0-\delta, t_0+\delta)\times I)$, I intervallo (aperto o chiuso, limitato od illimitato). Supponiamo che

$\frac{\partial f}{\partial t}$ esiste ed é continua in $(t_0-\delta, t_0+\delta)\times I$. Supponiamo inoltre che

$\exists\ g$ integrabile in $I: \ |f_t(t,x| \le g(x) \quad \forall t, x.$

Allora $t \to \int_I f(t,x)\,dx$ é derivabile $\forall\, t$ e

$$\frac{d}{dt}\int_I f(t,x)\,dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

Prova. Sia $[a,b] \subset I$. É $f(t+\tau,x) - f(t,x) =$

$$\int_0^1 [\frac{d}{ds} f(t+s\tau,x)]\,ds = f(t,x) + f_t(t,x)\tau + \tau\int_0^1 [f_t(t+s\tau,x) - f_t(t,x)]\,ds$$

La continuitá di f_t assicura che $x \to \int\limits_0^1 [f_t(t+s\tau,x) - f_t(t,x)]\, ds$ é continua e (fissato ϵ) $|\int\limits_0^1 [f_t(t+s\tau,x) - f_t(t,x)]\, ds| \le \epsilon \ \ \forall x \in [a,b]$ se τ é abbastanza piccolo (Heine-Cantor). D'altra parte, possiamo pensare di avere scelto $[a,b]$ in modo che

$$\int\limits_{I\setminus[a,b]} [\int\limits_0^1 |f_t(t+s\tau,x) - f_t(t,x)|\, ds]\, dx \ \le\ 2 \int\limits_{I\setminus[a,b]} g(x) \le \epsilon$$

Dunque $\quad |\tau \int\limits_0^1 [f_t(t+s\tau,x) - f_t(t,x)]\, ds| \ =\ \circ(\tau),\quad$ e quindi

$$\int\limits_I f(t+\tau,x)\, dx \ =\ \int\limits_I f(t,x)\, dx \ +\ \tau \int\limits_I f_t(t,x)\, dx \ +\ \circ(\tau)$$

cioé $\ t \to \int\limits_I f(t,x)\, dx\ $ é differenziabile e ha per derivata $\ t \to \int\limits_I \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, dx$

ESEMPIO. $f(t,x) = \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}$, $\ f_t(t,x) = -\sin x e^{-tx}$, $\ t > 0$, $\ x \in \mathbf{R}$ sono continue.

Inoltre $t \ge t_0 > 0 \ \Rightarrow\ |f(t,x)| + |f_t(t,x)| \ \le\ e^{-t_0 x}\ $ e $\ \int\limits_0^{+\infty} e^{-t_0 x}\, dx \ =\ \frac{1}{t_0}$.

Dunque $\quad \frac{d}{dt} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx \ =\ -\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x\, dx$

Siccome, integrando per parti,

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x\, dx \ =\ 1 - t \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx} \cos x\, dx \ =\ 1 - t^2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x\, dx$$

otteniamo

$$\frac{d}{dt} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx \ =\ -\frac{1}{1+t^2}$$

CONVOLUZIONE Siano $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\ \varphi \in C_0^\infty\ $ f integrabile. Allora

$$(f * \varphi)(x) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\varphi(y)\, dy \ =\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)\, dt \ =\ (\varphi * f)(x)$$

é $\ C^\infty\ $ e

$$\frac{d^k}{dx^k}(f * \varphi)(x) \ =\ (f * \frac{d^k \varphi}{dx^k})(x)$$

Prova. La prima affermazione segue dall'invarianza dell' integrale rispetto alla traslazione e alla riflessione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ovvero, effettuando il cambio di variabile $t = x - y$. Si puó dunque derivare sotto segno di integrale, giacché cé' equidominatezza:

$$|\frac{d^k}{dx^k} f(t)g(x-t)| \;=\; |f(t)\; g^{(k)}(x-t)| \;\leq\; c_k|f(t)|, \;\; c_k := \sup_{x\in\mathbf{R}} |g^{(k)}(x)|$$

Se f é anche continua, siamo infatti nelle ipotesi del Teorema precedente. Ma anche se f non é continua, vista la forma speciale (cioé $f(t)g(x-t)$) l'argomento si applica immutato per concludere che $f * \varphi$ é derivabile, e cosi via.

REGOLARIZZAZIONE PER CONVOLUZIONE

Sia $\varphi \in C_0^\infty, \;\; \varphi \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \;=\; 1$ (φ **nucleo regolarizzante**).
Sia $\varphi_\epsilon(x) \;:=\; \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. (**successione regolarizzante**)

Sia f continua. Allora

$$f * \varphi_\epsilon \to_{\epsilon\to 0} f \quad \text{uniformemente sui limitati}$$

Prova. $\varphi_\epsilon(x) = 0$ se $|x| \geq \epsilon$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\epsilon(x-y)\, dy \;=\; 1 \quad \Rightarrow$

$$\sup_{|x|\leq R} |f(x) - (f*\varphi_\epsilon)(x)| \leq \sup_{|x|\leq R} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)-f(y)|\varphi_\epsilon(x-y)dy \leq \sup_{|x|\leq R,\, |x-y|\leq\epsilon} |f(x)-f(y)|$$

Ma $\sup_{|x|\leq R,\, |x-y|\leq\epsilon} |f(x) - f(y)| \to_{\epsilon\to 0} 0$, perché

f é uniformemente continua in $[R-\epsilon,\; R+\epsilon]$.

COMPLEMENTI

L'integrale di Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2}$$

Giá sappiamo che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx \;\to_{t\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\; dx, \qquad\qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx \;\to_{t\to +\infty} 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx \;=\; -\frac{1}{1+t^2} \quad \text{e quindi} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx \;=\; -\arctan t\; + c$$

Necessariamente $c = \frac{\pi}{2}$, come si deduce mandando t a $+\infty$, e quindi, mandando t a zero, si ottiene il risultato .

La funzione Γ di Eulero

$$\Gamma(s) \;:=\; \int_0^{\infty} t^{s-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad\qquad s>0$$

La funzione Γ é definita in $(0,+\infty)$ perché $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-s}} \;<\; +\infty \;\; \forall s>0$ e $e^{-t}\, t^{s-1}$ va a zero, per t che va all'infinito, piú rapidamente di ogni potenza di $\frac{1}{x}$. Inoltre,

$$0 < \underline{s} < 1 < \overline{s}, \quad s\in[\underline{s},\overline{s}] \quad\Rightarrow\quad t^{s-1}\, e^{-t} \le t^{\underline{s}-1}\chi_{[0,1]}(t) \;+\; t^{\overline{s}-1}\chi_{[1,+\infty)}(t) \;\; \forall t$$

cioé $t^{s-1}\, e^{-t}$ é (continua ed) **equidominata** (per $s\in[\underline{s},\overline{s}]$) da una funzione

integrabile e quindi, $\Gamma(s)$ **dipende in modo continuo** da s.

Siccome $\frac{\partial}{\partial s} t^{s-1}\, e^{-t} \;=\; t^{s-1}\log t\; e^{-t}$ é ugualmente continua ed equidominata, Γ é derivabile, con $\Gamma'(s) \;=\; \int_0^{\infty} t^{s-1}\log t\; e^{-t}\, dt, \;\; s>0.$ Γ é infatti C^{∞}. Ad esempio, $\Gamma''(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}\,(\log t)^2\, e^{-t}\, dt$ (Γ é strettamente convessa).

(i) $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s), \quad \Gamma(n+1) = n!$ Integrando per parti: $\int\limits_0^\infty t^{s-1}\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{s}\int\limits_0^\infty t^s\, e^{-t}\, dt + \lim_{t\to+\infty} \frac{t^s}{s}\, e^{-t}|_{t=0}^t$. Inoltre, $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$

Segue in particolare che: $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} \to_{s\to 0^+} +\infty$.

Infine, $\Gamma(s+1) \geq \int\limits_s^\infty t^s\, e^{-t}\, dt = s^s\, e^{-s} \to_{s\to+\infty} +\infty$.

(ii) $\Gamma(s+1) = s^{s+1}\, e^{-s} \int\limits_0^\infty e^{-s(\tau - \log\tau - 1)}\, d\tau$. Segue dal cambio di variabile

$$t = s\tau : \quad \int\limits_0^\infty t^{s-1}\, e^{-t}\, dt = s^s \int\limits_0^\infty \tau^s e^{-s\tau} s d\tau = s^{s+1}\, e^{-s} \int\limits_0^\infty e^{s\log\tau}\, e^{-s\tau+s}$$

Il Teorema di aprossimazione di Weierstrass.

Sia $f \in C([a,b])$. Allora esiste una successione di polinomi che converge uniformemente ad f in $[a,b]$.

Sia $[a,b] \subset [-\frac{R}{3}, \frac{R}{3}]$, e indichiamo ancora con f un prolungamento continuo di f a tutto $\mathbf{R}$, tale che $f \equiv 0$ fuori di $[-\frac{2}{3}R, \frac{2}{3}R]$. Sia

$$p_n(x) := c_n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,[R^2 - (x-y)^2]^n\, dy, \qquad c_n := (\int\limits_{-R}^{R} [R^2 - t^2]^n\, dt)^{-1}$$

Notiamo che $p_n = f * \varphi_n$, $\quad \varphi_n(t) = \frac{(R^2-t^2)^n}{\int\limits_{-R}^{R} [R^2-t^2]^n\, dt}$. L'effetto regolarizzante della convoluzione é in questo caso il seguente: **i $p_n(x)$ sono polinomi**. Infatti

$$[R^2 - (x-y)^2]^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k(y)\, x^k \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)[R^2 - (x-y)^2]^n = \sum_{k=0}^{2n} x^k \int\limits_{-\frac{2}{3}R}^{\frac{2}{3}R} f(y) a_k(y)\, dy$$

La proprietá cruciale dei nuclei φ_n é la seguente:

$$\int\limits_{-R}^{R} \varphi_n(t)\, dt = 1, \qquad\qquad \frac{\int\limits_\delta^R \varphi_n(t)\, dt}{\int\limits_0^R \varphi_n(t)\, dt} \to_{n\to\infty} 0, \quad \forall\, \delta > 0$$

Infatti

$$\frac{\int\limits_\delta^R (R^2 - t^2)^n\, dt}{\int\limits_0^R (R^2 - t^2)^n\, dt} = \frac{\int\limits_{\frac{\delta}{R}}^1 (1 - s^2)^n\, ds}{\int\limits_0^1 (1 - s^2)^n\, ds} \leq \frac{\left(1 - \frac{\delta}{R}\right)\left(1 - \frac{\delta^2}{R^2}\right)^n}{\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})}$$

Proviamo ora che

$$p_n \quad \textbf{converge uniformemente} \text{ ad } \quad f \quad \text{in} \quad [-\tfrac{R}{3}, \tfrac{R}{3}]$$

(nota che $|x| \leq \frac{R}{3} \quad \Rightarrow \quad -R \leq x - \frac{2}{3}R \leq -\frac{R}{3} < 0 < \frac{R}{3} \leq x + \frac{2}{3}R \leq R$).

Sia $\quad M := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$. $\quad$ Scriviamo

$$|f(x) - p_n(x)| = |c_n \int_{-R}^{R} f(x)\,[R^2 - t^2]^n\,dt - c_n \int_{x-\frac{2}{3}R}^{x+\frac{2}{3}R} f(x-t)\,[R^2-t^2]^n\,dt| \leq$$

$$c_n \int_{x-\frac{2}{3}R}^{x+\frac{2}{3}R} |f(x)-f(x-t)|[R^2-t^2]^n dt + c_n M \left(\int_{-R}^{x-\frac{2}{3}R} [R^2-t^2]^n\,dt + \int_{x+\frac{2}{3}R}^{R} [R^2-t^2]^n\,dt \right)$$

Ora, $\quad f \in C_0(\mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad f \quad$ é uniformemente continua $\quad \Rightarrow \quad \forall \epsilon\ \exists \delta_\epsilon$:

$$|t| \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(x-t)| \leq \epsilon, \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad c_n \int_{-\delta_\epsilon}^{\delta_\epsilon} |f(x)-f(x-t)|\,[R^2-t^2]^n\,dt \leq \epsilon$$

Dunque $\quad |f(x) - p_n(x)| \leq \epsilon + 4Mc_n \int_{\delta_\epsilon}^{R} [R^2-t^2]^n\,dt.$ $\quad$ Ma, come visto

$c_n \int_{\delta_\epsilon}^{R} [R^2-t^2]^n dt \to_{n\to+\infty} 0 \quad$ e quindi $\quad \limsup_n \left[\sup_{|x|\leq\frac{R}{3}} |f(x) - p_n(x)| \right] \leq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$

La formula di Stirling

$$\Gamma(s+1) = s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s} \left[\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \circ(1) \right], \quad \text{per} \quad s \to +\infty$$

Ricordiamo che $\quad \Gamma(s+1) = s^{s+1} e^{-s} \int_0^\infty e^{-s\,\psi(\tau)}\,d\tau, \quad \psi(\tau) := \tau - \log\tau - 1.$ $\quad$ Si tratta quindi di provare che

$$I(s) := \int_0^\infty e^{-s\,\psi(\tau)}\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \circ(1) \right]$$

Scriviamo $\quad I(s) = I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) = \int_0^{1-\epsilon} e^{-s\psi(\tau)} d\tau + \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} e^{-s\psi(\tau)}\,d\tau + \int_{1+\epsilon}^{\infty} e^{-s\psi(\tau)} d\tau$

Per stimare gli I_j utilizziamo le seguenti proprietá di ψ:

$$\psi'(\tau) \ < \ 0 \ \ \forall\tau(0,1), \quad \psi(1) = \psi'(1) = 0, \qquad \psi'(\tau) > 0 \ \ \forall\tau > 1$$

$$|\tau-1| << 1 \Rightarrow \psi(\tau) \ = \ \tfrac{1}{2}(\tau-1)^2 + O((\tau-1)^3). \quad \text{In particolare,} \quad \forall\epsilon \in (0,1),$$

$$e^{-s\psi(\tau)} \leq e^{-s\,\psi(1-\epsilon)} \leq e^{-\frac{1}{4}\,s\epsilon^2} \ \ \forall\tau \in (0,1-\epsilon), \quad e^{-s\psi(\tau)} \leq e^{-s\psi(1+\epsilon)} \leq e^{-\frac{1}{4}\,s\,\epsilon^2} \ \ \forall\tau > 1+\epsilon$$

Segue subito

$$I_1 \leq e^{-\frac{1}{4}s\,\epsilon^2}, \qquad I_3 \ \leq (R-1)e^{-\frac{1}{4}s\,\epsilon^2} \ + \ \frac{2}{s}e^{-\frac{R}{2}\,s}$$

R tale che $\psi(\tau) \geq \frac{\tau}{2}, \ \ \forall\tau \geq R$ e $\qquad I_3 = \int\limits_{1+\epsilon}^{R} e^{-s\psi(\tau)}\,d\tau + \int\limits_{R}^{\infty} e^{-s\psi(\tau)}\,d\tau$

Infine, effettuando i cambi di variabile $\ \tau = 1 + t\epsilon, \ \ \sigma \ = \ \sqrt{s}\,t\epsilon\ $ otteniamo

$$I_2 = \epsilon\int_{-1}^{1} e^{-\frac{st^2\epsilon^2}{2}} \ e^{s\left[\frac{st^2\epsilon^2}{2} - \psi(1+t\epsilon)\right]}dt \ = \ \frac{1}{\sqrt{s}}\int_{-\sqrt{s}\,\epsilon}^{\sqrt{s}\,\epsilon} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \ e^{s\left[\frac{\sigma^2}{2s} - \psi(1\frac{\sigma}{\sqrt{s}})\right]}\,d\sigma$$

Ora, $\ |\sigma| \leq \sqrt{s}\,\epsilon \ \Rightarrow \ |\frac{\sigma}{\sqrt{s}}| \leq \epsilon \ \Rightarrow \ |s\left[\frac{\sigma^2}{2s} \ - \ \psi(1+\frac{\sigma}{\sqrt{s}})\right]| \leq c\,s\,|\frac{\sigma^3}{s\sqrt{s}}| \leq c\,s\,\epsilon^3.$

Se $\ \epsilon = \epsilon(s) \ := \ s^{-\delta}, \ \delta > \frac{1}{3}\ $ abbiamo $\ |s\left[\frac{\sigma^2}{2s} \ - \ \psi(1+\frac{\sigma}{\sqrt{s}})\right]| \leq c\,s^{1-3\delta} \leq c$ e quindi equidominatezza:

$$e^{-\frac{\sigma^2}{2}}\,\chi_{[-\sqrt{s}\,\epsilon,\,\sqrt{s}\,\epsilon]}\,e^{s\left[\frac{\sigma^2}{2s} - \psi(1\frac{\sigma}{\sqrt{s}})\right]} \leq c\,e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$$

Se chiediamo anche $\ \delta < \frac{1}{2}$, cosicché $\sqrt{s}\,\epsilon \to_{s\to+\infty} +\infty$ e quindi $\chi_{[-\sqrt{s}\,\epsilon,\,\sqrt{s}\,\epsilon]}(\sigma) \to 1, \ \ \forall\sigma$, concludiamo allora che $\qquad \sqrt{s}\,I_2(s) \to_{\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}\,d\sigma.$

Osserviamo infine che con la scelta $\epsilon = s^{-\delta}, \ \delta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ I_1 e I_3 decadono almeno come $e^{-s^{1-2\delta}}$. Ció completa la dimostrazione.