AM2: Tracce delle lezioni- XI Settimana

FUNZIONI IMPLICITE E TEOREMA DEL DINI

Siano $f \in C^1(O)$, O aperto in $\mathbf{R}^2$, $\Gamma_c := \{(x,y) : f(x,y) = c\} = f^{-1}(c)$, $c \in \mathbf{R}$ gli **insiemi di livello** di f. Sia $R_{\delta,\sigma}(x_0,y_0) := [x_0-\delta, x_0+\delta] \times [y_0-\sigma, y_0+\sigma] \subset O$.

Diremo che Γ_c é **curva (cartesiana) regolare** se $\forall (x_0,y_0) \in \Gamma_c$, $\exists\, \delta,\sigma > 0$,

$$\exists \varphi \in C^1([x_0-\delta, x_0+\delta],[y_0-\sigma,y_0+\sigma]) : \ \Gamma_c \cap R_{\delta,\sigma}(x_0,y_0) = \{(x,\varphi(x)), x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]\}$$

oppure

$$\exists \varphi \in C^1([y_0-\sigma, y_0+\sigma],[x_0-\delta,x_0+\delta]) : \ \Gamma_c \cap R_{\delta,\sigma}(x_0,y_0) = \{(\varphi(y),y), y \in [y_0-\sigma, y_0+\sigma]\}$$

Equivalentemente, $\quad f(x,y) = 0, \quad (x,y) \in R_{\delta,\sigma} \quad \Leftrightarrow$

$$y = \phi(x), \quad x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \qquad (x = \phi(y), \quad y \in [y_0-\sigma, y_0+\sigma])$$

Tale funzione φ, che si trova risolvendo l'equazione $f(x,y) = 0$ considerando y come dato e x come incognita (o viceversa), si chiama **funzione implicitamente definita** dall'equazione $f(x,y) = 0$.

TEOREMA DEL DINI Sia $f \in C^1(O)$, O aperto in $\mathbf{R}^2$, $(x_0,y_0) \in O$. Allora

$f_y(x_0,y_0) \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists\, \delta,\sigma > 0,\ \varphi \in C^1((x_0-\delta, x_0+\delta),(y_0-\sigma,y_0+\sigma))$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0), \quad (x,y) \in R_{\delta,\sigma}(x_0,y_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \varphi(x)$$

$f_x(x_0,y_0) \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists\, \delta,\sigma > 0,\ \varphi \in C^1((y_0-\sigma, y_0+\sigma),(x_0-\delta,x_0+\delta))$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0), \quad (x,y) \in R_{\delta,\sigma}(x_0,y_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \varphi(y)$$

Inoltre, $\qquad \varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}, \qquad \left(\varphi'(y) = -\frac{f_y(\varphi(y),y)}{f_x(\varphi(y),y)}\right)$

In particolare, $\quad \nabla f(u) \neq 0 \ \forall\, u \in f^{-1}(c) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(c)$ é curva regolare .

Prova. Sia $f_y(x_0,y_0) > 0$. Allora $\exists \delta'$, $\sigma, r > 0$: $f_y \geq r > 0$ in $R_{\delta,\sigma}(x_0,y_0)$. Quindi $f(x_0,y_0-\sigma) < f(x_0,y_0) < f(x_0,y_0+\sigma)$ e quindi $\exists\, \delta \leq \delta'$: $|x-x_0| \leq \delta \ \Rightarrow\ f(x,y_0-\sigma) < f(x_0,y_0) < f(x,y_0+\sigma)$. Dunque,

$$|x-x_0| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \exists!\, y = \varphi(x) \in [y_0-\sigma, y_0+\sigma] \ \text{ tale che } \ f(x,\varphi(x)) = 0$$

Verifichiamo ora che φ é continua, ed infatti $\varphi \in C^1((x_0-\delta, x_o+\delta))$:

$$0 = f(x+s,\varphi(x+s)) - f(x,\varphi(x)) = \int_0^1 \tfrac{d}{dt}[f(x+ts, t\varphi(x+s)+(1-t)\varphi(x))]\,dt$$

$$\Rightarrow \quad [\varphi(x+s)-\varphi(x)] \int_0^1 f_y(x+ts, t\varphi(x+s)+(1-t)\varphi(x))dt \ =$$

$$-\int_0^1 f_x(x+ts, t\varphi(x+s)+(1-t)\varphi(x))\; s\,dt \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x+s)-\varphi(x)| \le \frac{O(s)}{r}$$

e quindi, dividendo per s e passando al limite sotto segno di integrale,

$$[\lim_{s\to 0} \frac{\varphi(x+s)-\varphi(x)}{s}\,]\; f_y(x,\varphi(x)) \ = \ -f_x(x,\varphi(x))$$

NOTA. Da $\varphi'(x) \ = \ -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$ segue anche che $f \in C^2(O) \ \Rightarrow \ \varphi \in C^2$.

Derivando l'identitá $f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) \ \equiv \ -f_x(x,\varphi(x))$ si ottiene la formula :

$$\varphi''(x) = -\frac{\varphi'(x)[f_{xy}(x,\varphi(x)) + f_{yy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)] + [f_{xx}(x,\varphi(x)) + f_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)]}{f_y(x,\varphi(x))}$$

Piú in generale, $f \in C^\infty(O) \ \Rightarrow \ \varphi \in C^\infty$.

Punti regolari, valori regolari Sia $f \in C^1(O)$, O aperto in $\mathbf{R}^2$, $c \in \mathbf{R}$.

Un punto $u_0 \in O$ si dice **punto regolare** se $\nabla f(u_0) \neq 0$.

Se $\nabla f(u) \neq 0, \forall u \in \Gamma_c$, c si chiama **valore regolare** di f.

Dal Teorema del Dini:

-l'insieme di livello $\Gamma_c = \{f = c\}$ é, attorno a un punto regolare u_0, il grafico di una funzione regolare φ (nella variabile x od y).

-la retta tangente alla curva di livello Γ_c in u_0 ha equazione $< \nabla f(u_0), u-u_0 >= 0$,

-in particolare, $\nabla f(u_0)$ é ortogonale (in u_0) alla curva di livello $\{f(u) = f(u_0)$.

-se c é valore regolare, Γ_c é curva regolare.

PRINCIPIO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Siano $f, g \in C^1(O)$, e sia $\Gamma = \{g = 0\}$.

Supponiamo che $\nabla g(u) \neq 0 \ \ \forall u \in \Gamma$. Allora

$$u_0 \in \Gamma,\ f(u_0) \le f(u) \ \ \forall u \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbf{R} : \quad \nabla f(u_0) = \lambda \nabla g(u_0)$$

Infatti, intorno ad $u_0 = (x_0, y_0)$, il **vincolo** Γ si scrive, in base al Teorema del Dini ed all'ipotesi su Γ, come, diciamo, $(x, \varphi(x))$ ove φ é una funzione C^1 intorno ad x_0. Ma allora $x \to f(x, \varphi(x))$ ha un minimo in x_0 e quindi

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, \varphi(x))_{|x=x_0} = f_x(u_0) + f_y(u_0)\varphi'(x_0) = f_x(u_0) - f_y(u_0)\,\frac{g_x(u_0)}{g_y(u_0)}$$

Posto $\lambda := \frac{f_y(u_0)}{g_y(u_0)}$ si ha quindi $f_x(u_0) = \lambda g_x(u_0)$ e cioé $\nabla f(u_0) = \lambda \nabla g(u_0)$.

PUNTI SINGOLARI

Se $\nabla f(u_0) = 0$, $f(u_0) = c$, u_0 (punto critico di f a livello c) si dice anche **punto singolare** della curva $\Gamma_c = \{u : f(u) = c\}$, c si dice **valore critico** di f.

Sia $f \in C^2(O)$; u_0 si dice **punto critico non degenere di f** , o **punto singolare non degenere di** Γ se $\nabla f(u_0) = 0$ e $\det H_f(u_0) \neq 0$, ovvero $H_f(u_0)$ é invertibile, ovvero zero non é un autovalore di $H_f(u_0)$.

Se $\det H_f(u_0) > 0$, u_0 f ha un minimo o un massimo stretto in u_0, e quindi l'equazione $f = f(u_0)$ non ha soluzioni, vicino ad u_0, diverse da u_0.

Se $\det H_f(u_0) < 0$, $H_f(u_0)$ ha autovalori $-a < 0 < b$ con autovettori, diciamo ξ, η :

f ha un massimo in u_0 lungo ξ ed un minimo lungo η e quindi (supponiamo $f(u_0) = 0$) f ha zeri, vicini a u_0, in ciascuno dei quadranti individuati dai due autovettori.

Si puó far vedere che tali zeri sono vicini agli zeri di $< H_f(u_0)(u-u_0), (u-u_0) >$.

Se scriviamo $u - u_0 = h\xi + k\eta$, é $0 =< H_f(u_0)(u-u_0), (u-u_0) >= -ah^2 + bk^2$, che é l'equazione della coppia di rette $(\sqrt{b}k + \sqrt{a}h)\,(\sqrt{b}k - \sqrt{a}h) = 0$:

l'insieme di livello $f = f(u_0)$ é formato, vicino ad u_0, da una **coppia di grafici cartesiani** (passanti per u_0) aventi per rette tangenti tali due rette.

Esempi ed esercizi

1 Se $f(x,y) = x^2+y^2$, ogni $c \neq 0$ é **valore regolare**. Gli insiemi di livello $\{f = c\}$ (non vuoti se e solo se $c \geq 0$), sono curve regolari (e infatti circonferenze) se $c > 0$, mentre l'insieme di livello $\{f = 0\}$ si riduce al punto $(0,0)$.

L 'equazione $x^2+y^2 = r^2$ definisce implicitamente le funzioni $y = \sqrt{r^2 - x^2}, |x| \leq r$, $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $|x| \leq r$, $x = \sqrt{r^2 - y^2}$, $|y| \leq r$, $x = \sqrt{r^2 - y^2}$, $|y| \leq r$ che permettono di descrivere (localmente) gli insiemi $x^2 + y^2 = r^2$ come grafici.

2 Se $f(x,y) = x^2 - y^2$, ogni $c \neq 0$ é valore regolare. Gli insiemi di livello sono iperboli rappresentate in forma cartesiana dalle funzioni definite implicitamente dall'equazione $x^2 - y^2 = c$, ovvero $y = \sqrt{x^2 - c}$, $y = -\sqrt{x^2 - c}$, $|x| \geq \sqrt{c}$, se $c > 0$.

$c = 0$ é **valore singolare**: l'insieme di livello non é piú, attorno a zero, un grafico cartesiano. Esso é infatti dato dalla coppia di rette $x^2 - y^2 = 0$

3 $$f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$$
$f_x = 4x(x^2 + y^2) - 4a^2x$, $f_y = 4y(x^2 + y^2) + 4a^2y$

$f_{xx} = 4(x^2 + y^2) + 8x^2 - 4a^2$, $f_{xy} = 8xy$, $f_{yy} = 4(x^2 + y^2) + 8y^2 + 4a^2$

Punti stazionari: $(0,0)$, $(\pm 2, 0))$; $\det H(\pm 2, 0) > 0$, $\det H(0,0) < 0$,
$(\pm 2, 0)$ sono **minimi globali**: $\|u\| \to +\infty \Rightarrow f(u) \to +\infty$, $(0,0)$ é una sella.

Valori critici: $\min f = -4a^2$ (i corrispondenti punti singolari sono isolati)
$0 = f(0,0)$, cui corrisponde un **nodo**, con **tangenti**
$0 =< H_f(0,0)(x,y),(x,y) >= -4a^2x^2 + 4a^2y^2$, ovvero $y = x$, $y = -x$.

La curva $\Gamma_0 :$ $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$ (**Lemniscata di Bernoulli**)

É un **insieme compatto**, perché chiuso (zeri di una funzione continua!) e limitato (f é **coerciva**: $f(u) \to +\infty$ per $\|u\| \to +\infty$. Piú precisamente:
$x^4 \leq (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \leq 2a^2x^2 \quad \Rightarrow \quad |x| \leq a\sqrt{2}$
$0 \leq x^4+y^4 = 2a^2x^2 - 2x^2y^2 - 2a^2y^2 \leq 2x^2(a^2-y^2)2x^2(a^2-y^2) \Rightarrow \quad |y| \leq |a|$.

Simmetrie É un insieme simmetrico rispetto agli assi ed all'origine (invarianza rispetto alle trasformazioni $(x,y) \to (-x,y)$, $(x-y)$, $(-x,-y)$). Studiamo quindi Γ_0 nel primo quadrante.

Monotonia: $y > 0 \Rightarrow f_y > 0 \Rightarrow \Gamma_0$ é (localmente) grafico di una funzione della x : $y = y(x)$, con $y' = -\frac{f_x}{f_y}$. Siccome per $x > 0$, ($f_x > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > a^2$), mentre $f_x = f = 0$, $x > 0, y > 0 \Leftrightarrow (x,y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}$, concludiamo che $y(x)$ cresce in $[0, \frac{\sqrt{3}}{2}a]$, raggiungendo in $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ il suo massimo, pari a $\frac{a}{2}$, e decresce in $[\frac{\sqrt{3}}{2}a, a\sqrt{2}]$. Infine, $f_y(x,0) \equiv 0 \Rightarrow \Gamma_0$ ha in $(a\sqrt{2}, 0)$ tangente verticale.

Parametrizzazione di $\Gamma_0 = \{f = 0\}$
(sistema con rette per il punto doppio): $0 = (x^2 + t^2x^2)^2 - 8(x^2 - t^2x^2)$, ovvero

$$x = \pm 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}, \quad |t| \leq 1$$

Curve di livello: $\Gamma_c = \{f = c\}$, $c \geq -4a^2$. Sono insiemi compatti (continuitá + coercivitá!) simmetrici rispetto agli assi e all'origine. Gli insiemi $x = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, e $y = 0$, (cioé $f_x = 0$, $f_y = 0$ rispettivamente), sono il luogo dei punti delle Γ_c con tangente parallela all'asse Ox, rispettivamente Oy. Considerazioni su monotonia, massimi e minimi sono le stesse del caso $c = 0$.

Infine, Γ_c é **curva regolare** se $-16 < c \neq 0$. Se $-16 < c < 0$, Γ_c ha due componenti, curve omeomorfe a circoli, che racchiudono i due punti di minimo.

Sia $c > 0$: Γ_c é omeomorfa a un circolo attorno all'origine.
Per c piccolo, Γ_c interseca $x^2 + y^2 = a^2$, vicino a $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2})$ ed ha quindi un massimo e quindi un minimo nell'origine (similmente a Γ_0).
Per c grande, il sistema $f = c, x^2 + y^2 = a^2$ non ha piú soluzione, e quindi Γ_c ha solo un massimo nell'origine.
Determiniamo il valore di c che separa i due comportamenti, discutendo il segno di $y_c''(0)$
(abbiamo indicato con $y_c(x)$ la funzione implicitamente definita da $f = c$ in un intorno di $(0,0)$. Notiamo che $y_c(0) = (a^2 + \sqrt{a^4 + c})^{\frac{1}{2}}$).
Siccome $y_c'(0) = 0$, $y_c''(0) = -\frac{f_{xx}(0,y_c(0))}{f_y(0,y_c(0))} = -4\frac{\sqrt{a^4+c}-2a^2}{f_y(0,y_c(0))} > 0 \iff c < 3a^4$.

3 $\quad f(x,y) = (1 + \frac{1}{x})\,(1 + \frac{1}{y})\,(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$, $xy \neq 0$.
$f_x = -\frac{1}{x^2}\,(1 + \frac{1}{y})\,[\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + 1]$, $\qquad f_y = -\frac{1}{y^2}\,(1 + \frac{1}{x})\,[\frac{2}{y} + \frac{1}{x} + 1])$.
$f_{xx} = \frac{2}{x^3}(1 + \frac{1}{y})\,[1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{y}]$, $\quad f_{xy} = \frac{2}{x^2y^2}\,[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}]$, $\quad f_{yy} = \frac{2}{y^3}(1 + \frac{1}{x})\,[1 + \frac{3}{y} + \frac{1}{x}]$.

Punti critici: $\quad u_1 = (1,-1), u_2 = (-1,1), u_3 = (-1,-1), u_4 = (-3,-3)$.
Valori critici $\quad 0 = f(u_i)$, $i = 1,2,3$, $\quad -\frac{8}{27} = f(u_4)$.

É $\det H_f(u_i) < 0$, $i = 1,2,3$, gli u_i, $i = 1,2,3$ sono quindi nodi. L'insieme di livello $f = 0$, che contiene i tre punti singolari, é ovviamente dato dalle tre rette $x = -1$, $y = -1$, $y = -x$.

Invece, $\det H_f(-3,-3) > 0$ e quindi u_4 é punto singolare isolato : é di minimo locale per f ed infatti di **minimo assoluto** in $x < -1, y < -1$, giacché

$f_x(x,y)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}+\frac{1}{y}+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2y}{y+1}$ e quindi $\forall y<-1, \inf_{x<-1} f(x,y) = f(-\frac{2y}{y+1},y) = -\frac{1}{4}(1-\frac{1}{y})^2(1+\frac{1}{y})$ che decresce tra $-\infty$ (dove vale $-\frac{1}{4}$) e $y=-3$ (dove vale $-\frac{8}{27}$) e cresce tra -3 e -1 (dove vale zero) .

Descriviamo ora le **curve di livello** Γ_c nella regione $(-\infty,-1]\times(-\infty,-1]$. Tale regione ha per frontiera curve di livello $(x=-1, y=-1)$ ed al suo interno f prende valori in $(-\frac{8}{27},0)$: $\Gamma_c=\{f=c\}$, $c\in(-\frac{8}{27},0)$ é **curva regolare** contenuta in $(-\infty,-1)\times(-\infty,-1)$. Siccome f ha un minimo stretto in $(-3,-3)$, con $f(-3,-3)=-\frac{8}{27}$, le curve di livello $f^{-1}(c), -\frac{8}{27}<c<-\frac{8}{27}+\delta$ sono **curve chiuse** attorno a $(-3,-3)$.

Considerazioni qualitative. Siccome $f(x,y)=f(y,x)$ le curve di livello sono simmetriche rispetto alla retta $y=x$. Ci limiteremo quindi alla regione sottostante tale retta (ovvero $y\le x$).

Lungo la retta $y=x$ é $f(x,x)=\frac{2}{x}(1+\frac{1}{x})^2$, funzione che decresce da zero a $-\frac{8}{27}$ tra $x=-\infty$ e $x=-3$, per poi crescere di nuovo a zero tra $x=-3$ e $x=-1$. Ci sono poi esattamente due valori $\underline{x}<-3<\overline{x}$ tali che $f(\underline{x},\underline{x})=f(\overline{x},\overline{x})=-\frac{1}{4}$.

I rami di iperbole $y=-\frac{x}{x+2}$ (insieme degli zeri di f_x) e $y=-\frac{2x}{x+1}$ (insieme degli zeri di f_y), dividono la regione $x<-1, y<-1$ in due zone: $\{(x,y): y> \max\{-\frac{x}{x+2},-\frac{2x}{x+1}\}\}\cup\{(x,y): y< \min\{-\frac{x}{x+2},-\frac{2x}{x+1}\}\}$ e la zona complementare. Nella prima, $f_xf_y>0$ e quindi le linee di livello sono decrescenti ($\varphi'=-\frac{f_x}{f_y}$!) mentre nell'altra sono crescenti.

Inoltre, nei punti del ramo $y=-\frac{x}{x+2}$, $y>x$ le curve di livello hanno punti di massimo, mentre lungo $y=-\frac{x}{x+2}$, $y<x$ hanno punti di minimo (segno di φ'' !). Analogamente, nei punti di $y=-\frac{2x}{x+1}$ hanno tangente verticale.

Parametrizziamo ora le curve di livello mediante i punti (x,x), $x<-1$. Se $x_0\le\underline{x}$, $f\equiv f(x_0,x_0)\ge f(\underline{x},\underline{x})=-\frac{1}{4}$ lungo la curva di livello passante per (x_0,x_0). Tale grafico é sempre decrescente perché non puó incontrare il ramo $y=-\frac{x}{x+2}$ lungo il quale (siamo nella regione $y<x$!) f non raggiunge il valore $-\frac{1}{4}$. Ed infatti tale grafico avrá un asintoto verticale in x tale che $\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x})=f(x_0,x_0)$.

Analogamente, se $x_0\ge\overline{x}$, $f\equiv f(x_0,x_0)\ge f(\underline{x},\underline{x})=-\frac{1}{4}$ lungo la curva di livello passante per (x_0,x_0).

Se invece $x_0\in(\underline{x},\overline{\,})$, $f\equiv f(x_0,x_0)<f(\underline{x},\underline{x})=-\frac{1}{4}$ lungo la curva di livello passante per (x_0,x_0). Tale grafico incontrerá il ramo dei minimi e la curva di livello si chiuderá attorno al punto $(-3,-3)$.

(Folium di Cartesio) Zeri di $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$