AM2: Tracce delle lezioni- X Settimana

DERIVATE SUCCESSIVE Sia $f \in C^1(O)$. Se $f_x, f_y \in C^1(O)$, f si dice di classe C^2 e

$$f_{xx} := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_{xy} := \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_{yx} := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f_{yy} := \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

sono le derivate seconde di f.

Lemma di Schwartz $\quad f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad f_{xy} = f_{yx}$

Prova. Sia $D_r(x_0, y_0) \subset O$, $\delta << r$, $R_\delta := [x_0-\delta, x_0+\delta] \times [y_0-\delta, y_0+\delta]$. Si ha:

$$\frac{1}{4\delta^2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left(\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy\right)\,dx \;=\; \frac{1}{4\delta^2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0+\delta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0-\delta)]\,dx \;=$$

$$\frac{1}{4\delta^2}\;[f(x_0+\delta, y_0+\delta) - f(x_0-\delta, y_0+\delta) - f(x_0+\delta, y_0-\delta) + f(x_0-\delta, y_0-\delta)] \;=$$

$$= \frac{1}{4\delta^2}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\delta, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0-\delta, y)]\,dy \;=\; \frac{1}{4\delta^2}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\right)\,dy$$

Applicando due volte il teorema della media, otteniamo

$$\exists (x_\delta, y_\delta) \in R_\delta : \frac{1}{4\delta^2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left(\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy\right)\,dx \;=\; \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_\delta, y_\delta)$$

$$\exists (x^\delta, y^\delta) \in R_\delta : \frac{1}{4\delta^2}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\right)\,dy = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x^\delta, y^\delta)$$

Mandando δ a zero, $(x_\delta, y_\delta), (x^\delta, y^\delta)$ vanno a (x_0, y_0) e quindi $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Matrice Hessiana Sia $f \in C^2(O)$ ed indichiamo con $u = (x_1, x_2)$ i punti di $\mathbf{R}^2$. La matrice 2×2 delle derivate seconde

$$H_f(u) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(u)\right)_{i,j=1,2}$$

é detta matrice Hessiana . Dal Lemma di Schwartz: H_f é matrice simmetrica.

Formula di Taylor al secondo ordine Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Allora:

$$f(u+h) = f(u) + < \nabla f(u)\,,\, h > + \frac{1}{2} < H_f(u)\,h,\ h > + \circ\,(||h||^2)$$

Prova. Indichiamo con x_1, x_2 le variabili, $h = (h_1, h_2)$. Posto $\varphi(t) := f(u+th)$, é

$$\varphi(0) = f(u),\ \varphi(1) = f(u+th), \qquad \frac{d\varphi}{dt}(u+th) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(u+th)h_i$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(u+th) = \sum_{i=1}^{2} \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i}(u+th)h_i = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j = < H_f(u+th)h, h >$$

Basta quindi sostituire in $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi'(t)\,dt$ per ottenere

$$f(u+h) = f(u) + < \nabla f(u)\,,\, h > + \frac{1}{2} < H_f(u)h, h > +$$

$$\int_0^1 (1-t)\ < [H_f(u+th) - H_f(u)]h, h >\ dt.$$

La stima del resto segue da $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0 :\ |t| \le \delta_\epsilon \ \Rightarrow$

$$|f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u)| \le \epsilon \ \Rightarrow\ \Big|\sum_{i,j=1}^{2}\Big[f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u)\Big]\ h_i h_j\ \Big| \le 2\epsilon ||h||^2$$

MASSIMI E MINIMI IN PIÚ VARIABILI

NOMENCLATURA. Sia $f \in C^1(D_r(u_0))$

(i) $u \in D_r(u_0)$ é **critico** o **stazionario** per f se $\nabla f(u) = 0$

(ii) $u \in D_r(u_0)$ é punto di **minimo locale (massimo locale)** se $\exists \delta > 0 :$

$$f(u) \le f(v) \qquad (f(u) \ge f(v)) \qquad \forall v \in D_\delta(u)$$

Un punto stazionario che non é ne' di massimo ne' di minimo si dice punto di sella.

Condizioni necessarie

Sia $\;f \in C^1(D_r(u_0)),\;\; u \in D_r(u_0)$ **minimo locale (massimo locale)**

(i) allora $\qquad \nabla f(u) \,=\, 0$

(ii) Se $\;f \in C^2,\;$ allora $\qquad < H_f(u)\, h,\, h > \geq\, 0 \quad (\leq 0) \quad \forall h \in \mathbf{R}^2$

Prova. (i) Se u é punto di minimo, allora

$\forall h,\;\; t \to f(u+th)$ ha un punto di minimo in $\;t=0\;$ e quindi

$0 = \frac{d}{dt} f(u+th)_{|t=0} =< \nabla f(u), h > \;\; \forall h \in \mathbf{R}^2: \;\; \nabla f(u) = 0.$

(ii) Sia u punto di minimo. Allora $\;\nabla f(u) = 0\;$ e la formula di Taylor dá

$$0 \,\leq\, f(u+h) - f(u) \,=\, ||h||^2\,[< \nabla f(u)\,\frac{h}{||h||},\, \frac{h}{||h||} > \,+\, \circ\,(1)]$$

e quindi $\qquad < \nabla f(u)\, \frac{h}{||h||},\, \frac{h}{||h||} \,> \geq\, 0.$ Analogamente se u é massimo locale.

Una condizioni sufficente Sia $\;f \in C^2(D_r(u_0),\; u \in D_r(u_0),\; \nabla f(u) = 0$:

(i) $< H_f(u)\, h, h >> 0 \;\; \forall h \in \mathbf{R}^2,\; h \neq 0, \quad \Rightarrow\;\; u$ é punto di minimo locale (stretto: $\;f(u) < f(v)\;\; \forall v \neq u\;$ vicino a u).

(ii) $< H_f(u)\, h, h >< 0 \;\; \forall h \in \mathbf{R}^2,\; h \neq 0, \quad \Rightarrow\;\; u$ é punto di massimo locale (stretto: $\;f(u) > f(v)\;\; \forall v \neq u\;$ vicino a u).

Prova. $\;h \to< H_f(u)\, h, h >\;$ continua, $\;< H_f(u)\, h, h >> 0\;\; \forall h \in \mathbf{R}^2,\; h \neq 0,\;\; \Rightarrow$

$$\exists\, m := \;\min_{||h||=1} < H_f(u)\, h, h >>\; 0$$

Quindi, $\qquad < H_f(u)\, h, h > \geq\; m\, \|h\|^2 \;\; \forall h \in \mathbf{R}^2.$

Allora, usando Taylor e $\;\nabla f(u) = 0\;$ vediamo che $\quad 0 < \|h\| << 1 \;\; \Rightarrow$

$$f(u+h) - f(u) \;= \|h\|^2\,[< \nabla f(u)\,\frac{h}{\|h\|},\, \frac{h}{\|h\|} > \,+\, \circ\,(1)] \;\geq \|h\|^2\,[m \,+\, \circ(1)] \;>\; 0$$

Dunque, la natura di un punto stazionario u dipende dalle proprietá di segno della forma quadratica $< H_f(u)h, h >$ associata alla matrice Hessiana $H_f(u)$.

Forme quadratiche

Per il lemma di Schwartz, la matrice $H_f(u)$ é simmetrica, e quindi ha autovalori reali, diciamo $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Come noto, le proprietá di segno della forma quadratica associata (indichiamo con x_1, x_2 le variabili)

$$< H_f(u)h, h >= \sum_{ij=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u) \; = \; f_{x_1x_1}(u)\, h_1^2 \; + \; 2f_{x_1x_2}(u)\, h_1\, h_2 \; + \; f_{x_2x_2}(u)\, h_2^2$$

$h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$, sono legate al segno degli autovalori. Ne diamo qui una dimostrazione analitica.

Sia $\mathcal{A}=(a_{ij})_{ij=1,2}=\mathcal{A}^{\,t}$ matrice 2×2 simmetrica. La forma quadratica associata

$$< \mathcal{A}\;\, h,\; h > := \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\, h_i\, h_j, \qquad h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$$ si dice

definita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\;\, h,\; h >> \; 0\,(< 0),\;\; \forall\, h \neq (0,0)$

semidefinita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\;\, h,\; h > \geq \; 0\,(\leq 0),\;\; \forall\, h \in \mathbf{R}^2$

Proposizione Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrice simmetrica 2×2, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ i suoi autovalori. Sia $a(h) :=< \mathcal{A}\;(h), h >,\;\; h \in \mathbf{R}^2$. Allora

$$\lambda_1 = \inf_{||h||=1} a(h), \qquad\qquad \lambda_2 = \sup_{||h||=1} a(h)$$

Prova. $m := a(\underline{h}) = \min_{||h||=1} a(h) \leq \frac{a(h)}{||h||}\; \forall h \in \mathbf{R}^2, h \neq 0 \;\Rightarrow\; 0 = \left(\frac{d}{dt}\; \frac{a(\underline{h}+tk)}{||\underline{h}+tk||^2}\right)_{|t=0} =$

$$2[< \mathcal{A}\, \underline{h}, k > \; - \; < \mathcal{A}\, \underline{h}, \underline{h} >< \underline{h}, k \; >] \; = \; 2[< \mathcal{A}\, \underline{h}, k > \; - m \; < \underline{h}, k \; >] \;\; \forall\; k \in \mathbf{R}^2$$

Dunque $\mathcal{A}\, \underline{h} \; = \; m\, \underline{h}$, cioé m é un autovalore di $\mathcal{A}$, necessariamente il piú piccolo, giacché $\mathcal{A}\; h = \lambda h,\; ||h|| = 1 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda \; =< \mathcal{A}\; h, h > \geq \; m.$

Corollario

(ii) $\mathcal{A}$ é definita positiva (negativa) $\;\Leftrightarrow\;$ $\lambda_1 > 0 \;\; (\lambda_2 < 0)$

(iii) $\mathcal{A}$ é semidefinita positiva (negativa) $\;\Leftrightarrow\;$ $\lambda_1 = 0 \;\; (\lambda_2 = 0)$