AM2: Tracce delle lezioni- IX Settimana

DERIVATE PARZIALI Sia f definita in A, $D_r(u_0) \subset A$, $u_0 = (x_0, y_0)$. Se $x \to f(x, y_0)$ é derivabile in x_0, diremo che f é (parzialmente) derivabile rispetto alla x in u_0 e scriveremo

$$f_x(u_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) : = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{d}{dx} f(x, y_0)_{|x=x_0}$$

$f_y(u_0) := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \frac{d}{dy} f(x_0, y)_{|y=y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$ (se esiste, finito).

Sia O aperto: $f \in C^1(O)$ se $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y := \frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e sono continue in O.

ESEMPI 1. (i) $f(x, y) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} y + \ldots + a_{n-1}\, x y^{n-1} + a_n\, y^n$, $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $f(x, y) = \sin xy$ sono di classe $C^1(\mathbf{R}^2)$

(ii) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$ é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0))$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Ricordiamo che f non é continua in zero. Dunque, una funzione

f **puó avere derivate parziali in un aperto** O **senza essere continua in** O.

A futura memoria: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{1}{y}$ $\forall y \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0, 0)$.

(iii) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$ é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0))$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Ricordiamo che f é continua anche in zero. Di nuovo, a futura memoria,

$|\frac{\partial f}{\partial x}(t, t)| = \frac{1}{2}$ per $t \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0, 0)$.

DERIVATE DIREZIONALI Sia f definita in A, $D_r(u_0) \subset A$, $u_0 = (x_0, y_0)$. Se $t \to f(u_0 + th)$ é derivabile a destra in $t = 0$, diremo che f é derivabile nella direzione h in u_0 e scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial h}(u_0) := \frac{d}{dt} f(u_0 + th)_{|_{t=0^+}} := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(u_0 + th) - f(u_0)}{t}$$

ESEMPI 2. (k) f come in (ii): $f(0,0)=0$, $f(tx,ty)=\frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(0,0)$ non esiste per $h\in\mathbf{R}^2$, diverso da $(x,0)$, $(0,y)$.

(kk) $f(x,y)=\frac{x^4y}{x^6+|y|^3}$, $f(0,0)=0$. É $\frac{f(tx,ty)}{t}=\frac{tx^4y}{t^3x^6+|y|^3}\to_{t\to 0^+} 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=0\ \forall h\in\mathbf{R}^2$. Siccome $f(x,x^2)\equiv\frac{1}{2}$, vediamo che

$$\exists\ \frac{\partial f}{\partial h}(u_0)\ \forall h\in\mathbf{R}^2 \quad \textbf{non implica} \quad f \textbf{ continua in } u_0.$$

(kkk) Se $f(u)=||u||$: $f(tu)=tf(u)\ \forall t\geq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=f(h)\ \forall h\in\mathbf{R}^2$. Notiamo che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esistono ($f(x,0)=|x|$!):

$$\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(u) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial(1,0)}(u)=-\frac{\partial f}{\partial(-1,0)}(u)$$

(kkkk) f come in (iii): $f(tx,ty)=t\frac{x^2y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=f(h)\ \forall h\in\mathbf{R}^2$.

PRODOTTO SCALARE Se $u_1=(x_1,y_1), u_2=(x_2,y_2)$,

$< u_1,u_2 > := x_1\,x_2 + y_1\,y_2$ é il prodotto scalare tra u_1 ed u_2. Proprietá

positivitá $0\leq < u,u > = ||u||^2,\ \forall u\in\mathbf{R}^2$

simmetria $< u,v > = < v,u >\ \forall u,v\in\mathbf{R}^2$

bilinearitá $< au+bv,h > = a < u,h > + b < v,h >\ \forall a,b\in\mathbf{R}$

ortogonalitá $< u,v > = 0 \Leftrightarrow$ le rette $\mathbf{R}u$, $\mathbf{R}v$ sono tra loro ortogonali

Diseguaglianza di Cauchy-Schwartz $|< u,v >|\leq ||u||\,||v||\ \forall u,v\in\mathbf{R}^2$

Infatti $0\leq < u+tv,u+tv > = ||u||^2 + 2\,t < u,v > + t^2||v||^2\ \forall t \Rightarrow < u,v >^2 - ||u||\,||v|| \leq 0$.

FUNZIONI LINEARI $l:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ é lineare se

$l(au+bv) = a\,l(u) + b\,l(v) \quad \forall a,b\in\mathbf{R},\ u,v\in\mathbf{R}^2$

Se $h\in\mathbf{R}^2$, $l(u) := < u,h >$ é lineare . Viceversa, se l é lineare:

$u=(x,y) \Rightarrow l(u)=l(x,y) = x\,l(1,0)+y\,l(0,1) = < u,h >, \quad h:=(l(1,0),l(0,1))$

DIFFERENZIABILITÁ, DIFFERENZIALE, GRADIENTE

Sia f definita in A, $D_r(u_0) \subset A$, $u_0 = (x_0, y_0)$. Se esiste l lineare tale che

$$f(u_0 + h) - [f(u_0) + l(h)] = \circ(||h||) \quad \text{per} \quad ||h|| \to 0$$

f si dice differenziabile in u_0 e $df(u_0) := l$ é il differenziale di f in u_0.

Il vettore v tale che $df(u_0)\,(h) =< v, h > \ \forall h \in \mathbf{R}^2$ si chiama gradiente di f in u_0 e si denota $\nabla f(u_0)$: $df(u_0)\,(h) = < \nabla f(u_0), h > \ \forall h \in \mathbf{R}^2$

Proposizione 1 Sia f differenziabile in u. Allora

(i) f é continua in u , (ii) $\forall h \in \mathbf{R}^2$, $\exists \frac{\partial f}{\partial h}(u)$ e $\frac{\partial f}{\partial h}(u) = < \nabla f(u), h >$

In particolare, f_x, f_y esistono in u e $\nabla f(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u), \ \frac{\partial f}{\partial y}(u) \right)$.

Infatti $|f(u+h) - f(u)| \leq | < \nabla f(u), h > + \circ(||h||)| \leq (||\nabla f(u) + \circ(1))||h||$,

e quindi f é continua in u. Poi, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon$: $||h|| = 1$, $|t| \leq \delta_\epsilon \ \Rightarrow$

$$\left|\frac{f(u+th)-f(u)}{t} - < \nabla f(u), h > \right| = \left|\frac{f(u+th)-f(u)-<\nabla f(u),th>}{t}\right| = \frac{\circ(||th||)}{|t|} \leq \epsilon \ .$$

Proposizione 2 $f \in C^1(D_r((x,y))) \ \Rightarrow \ f$ é differenziabile in (x,y).

Prova. f_x, f_y continue $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta_\epsilon > 0$: $|\frac{\partial f}{\partial x}(w) - \frac{\partial f}{\partial x}(v)| + |\frac{\partial f}{\partial y}(w) - \frac{\partial f}{\partial y}(v)| \leq \epsilon$ $\forall \ w, v \in D_r(u)$ e $|f(x+s, y+t) - f(x,y) - [\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t]| =$

$$|f(x+s,y+t) - f(x,y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s + f(x,y+t) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t| \leq$$

$$\left| \int_x^{x+s} [\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)]d\tau \right| + \left| \int_y^{y+t} [\frac{\partial f}{\partial y}(x,\tau) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)]d\tau \right| \leq \epsilon(|s|+|t|) \text{ se } s^2+t^2 \leq \delta_\epsilon^2.$$

Significato geometrico del differenziale

La funzione $z(u) := f(u_0) + < \nabla f(u_0), (u - u_0) >$, che approssima $f(u)$, vicino ad u_0, a meno di un $\circ(||u - u_0||)$, ha per grafico (in $\mathbf{R}^3$) il piano passante per $(u_0, f(u_0))$ e parallelo al piano passante per l'origine di $\mathbf{R}^3$ ed ortogonale al vettore $(\frac{\partial f}{\partial x}(u_0), \frac{\partial f}{\partial y}(u_0), -1)$ (piano di equazione $z :=< \nabla f(u_0), h >$).

Tale piano si chiama piano tangente in $(u_0, f(u_0))$ al grafico di $f := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in$dominio di $f\}$.

Significato geometrico del gradiente.

$\frac{d}{dt}f(u+th)=\frac{\partial f}{\partial h}(u)=<\nabla f(u),h>$ misura la pendenza del grafico di f intersecato con il piano $\{(u+th,z): t,z\in\mathbf{R}\}$. Siccome $\sup\limits_{||h||=1}<\nabla f(u),h>=||\nabla f(u)||$, vediamo che $\nabla f(u)$ fornisce la direzione di massima pendenza del grafico di f in u e $||\nabla f(u)||$ é la massima pendenza di f in u.

ESEMPI 3. (j) Se $g\in C([a,b])$, $f(x,y):=\int\limits_x^y g(t)dt$, $x,y\in[a,b]\times[a,b]$, é $\frac{\partial f}{\partial x}=-g(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=g(y)$, $x,y\in(a,b)$ e quindi $f\in C^1((a,b)\times(a,b))$.

(jj) f in 1-(ii) ha derivate parziali nulle in $(0,0)$ ma, essendo discontinua in $(0,0)$ non é ivi differenziabile . Per la stessa ragione, la f in 2-(kk), che ha derivate direzionali (tutte nulle) non é differenziabile in $(0,0)$. La f in 1-(iii), continua e derivabile in tutte le direzioni in $(0,0)$, non é ivi differenziabile, perché $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=f(h)$ non dipende linearmente da h.

(jjj) Sia $f(x,y)=\frac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2}$, $f(0,0)=0$. Siccome $|f(x,y)|\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, f é continua in $(0,0)$. Inoltre $f(tx,ty)=\frac{|t|t\,x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{t^2x^4+y^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=0$ $\forall h\in\mathbf{R}^2$. Anche qui peró f non é differenziabile in $(0,0)$: $g:=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ non va a zero per x^2+y^2 tendente a zero, giacché $g(x,x^2)\equiv\frac{1}{2}$.

Anche, $\sup\limits_{x^2+y^2=1}\frac{f(tx,ty)}{t}\ge\sup\limits_{|y|\le1}\frac{t\,(1-y^2)y}{t^2(1-y^2)^2+y^2}\ge\frac{t^2\,(1-t^2)}{t^2(1-t^2)^2+t^2}\to_{t\to0}\frac{1}{2}$.

Il Teorema del valor medio Sia $f\in C^1(O)$, O aperto convesso. Allora

$$|f(u)-f(v)|\;=\;|\int\limits_0^1[\frac{d}{dt}f(v+t(u-v))]\,dt|\;=$$

$$|\int\limits_0^1\;<\nabla f(v+t(u-v)),u-v>\;dt|\le||u-v||\sup_{t\in[0,1]}\|\nabla f(v+t(u-v))\|$$

Corollario Sia $f\in C^1(O)$, O aperto connesso per archi. Allora

$$\nabla f(u)\;=\;0\;\forall u\in O\;\;\Rightarrow\;\;f\equiv\text{cost. in }O$$

Prova. Fissati $u,\,v\in O$, sia $\gamma(t)=(x(t),y(t))\in O\;\forall\,t\in[0,1]$, un cammino continuo congiungente u e v in O : $\gamma(0)=u$, $\gamma(1)=v$. Il teorema del valor medio implica che f é costante sui dischi e quindi, dalla continuitá di γ segue: $\overline{t}:=\sup\{t: f(\gamma(s))=f(u)\;\;\forall s\in[0,t)\}>0$ ed infatti $\overline{t}=1$.

Cammini differenziabili $\gamma \in C^1([0,1],\mathbf{R}^2)$ se $\gamma(t) = (x(t),y(t))$, $x,y \in C^1([0,1])$. γ si chiama cammino differenziabile, e

$\dot\gamma(t) = (\dot x(t), \dot y(t))$ é il **vettore tangente** in $\gamma(t)$ a γ.

Esempio. $\gamma(t) = (r\cos 2\pi t, r\sin 2\pi t)$, $t \in [0,1]$, $\dot\gamma(t) = (-2\pi r\sin 2\pi t, 2\pi r\cos 2\pi t)$

Derivazione di funzioni composte Sia $f \in C^1(O)$, $\gamma \in C^1([0,1],O)$ Allora

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = < \nabla f(\gamma(t), \dot\gamma(t) >$$

É: $\gamma(t+s) = \gamma(t) + \dot\gamma(t)s + h(s)$, $f(u+h) = f(u) + < \nabla f(u), h > + \sigma(h) \Rightarrow$

$$f(\gamma(t+s)) = f(\gamma(t)) + < \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) > s + \circ(s) \quad \text{ove}$$

$\circ(s) := < \nabla f(\gamma(t)), h(s) > + \sigma(\dot\gamma(t)s + h(s))$. Infatti $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$, $s_e > 0$:

$(||k|| \le \delta_\epsilon \;\Rightarrow\; \sigma(k) \le \epsilon||k||)$ e $(|s| \le s_\epsilon \;\Rightarrow\; ||h(s)|| \le \epsilon|s|$ e $||\dot\gamma(t)|||s| + ||h(s)|| \le \delta_\epsilon)$

$\Rightarrow\; | < \nabla f(\gamma(t)), h(s) > + \sigma(\dot\gamma(t)s + h(s))| \le \epsilon\,|s|\,(||\nabla f(\gamma(t))|| + ||\dot\gamma(t)|| + 1)$.

Le equazioni di Cauchy-Riemann $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ è olmorfa se e solo se

$$u,v \in C^1, \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Rightarrow$: $f'(z) = a+ib \;\Rightarrow\; u(x+s,y+t) + iv(x+s,y+t) = u(x,y) + iv(x,y) + (a+ib)(s+it) + \circ(|s|+|t|) \;\Rightarrow\; u(x+s,y+t) = u(x,y) + as - bt + \circ(|s|+|t|)$, $v(x+s,y+t) = v(x,y) + bs + at + \circ(|s|+|t|) \;\Rightarrow\; a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $b = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$.

$\Leftarrow$: $u(x+s,y+t) = u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t + \circ(|s|+|t|)$, $v(x+s,y+t) = v(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}s + \frac{\partial v}{\partial y}t + \circ(|s|+|t|) \;\Rightarrow\; u(x+s,y+t) + iv(x+s,y+t) = u(x,y) + iv(x,y) + (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})s + (\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y})it$. Ma $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \;\Rightarrow$ $u(x+s,y+t) + iv(x+s,y+t) = u(x,y) + iv(x,y) + (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(s+it) + \circ(|s|+|t|) \;\Rightarrow\; f$ é derivabile e $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$.

FUNZIONI ARMONICHE: Se $f(z) = u + iv$ e le derivate parziali di u, v sono C^1, dalle equazioni di Cauchy-Riemann segue $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
(infatti, come vedremo, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$).