Lavoro Guidato N6 di AM2

Esercizio1
Calcolare $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.
Sugg. Posto $F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$ per $t > 0$, mostrare che $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$ e $\lim_{t\to 0} F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Concludere quindi calcolando esplicitamente la derivata $F^{'}(t)$ per $t > 0$.

Esercizio2
Sia f una funzione continua in $[0,1]$ e si definisca

$$p_n(x) = c_n \int_0^1 f(y) \left(1 - (x-y)^2\right)^n dy \,, \quad c_n = \left(\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt\right)^{-1} .$$

Mostrare che:
a) p_n è una successione di polinomi tale che $p_n \to f$ uniformemente in $[\delta, 1-\delta]$ per ogni $\delta \in (0, \frac{1}{2})$;
b) se $f \in C([a,b])$, allora esiste una successione di polinomi che converge uniformemente a f in $[a,b]$.
Sugg. a) Provare che $\lim_{n\to+\infty} c_n \int_r^1 (1-t^2)^n dt = 0$ per ogni $r \in (0,1)$ ed usare le seguenti disuguaglianze: se $x \in [\delta, 1-\delta]$, allora

$$|f(x) - p_n(x)| \le c_n \int_{x-1}^x |f(x) - f(x-t)|(1-t^2)^n dt + 2Mc_n \int_\delta^1 (1-t^2)^n dt$$

e

$$c_n \int_{x-1}^x |f(x)-f(x-t)|(1-t^2)^n dt \le c_n \int_{-\rho}^\rho |f(x)-f(x-t)|(1-t^2)^n dt + 4Mc_n \int_\rho^{1-\delta} (1-t^2)^n dt,$$

ove $M = \max_{[0,1]} |f|$ e $\rho \in (0,1)$.
b) Si consideri la funzione $f(x)$ estesa per continuitá come $f(a)$ per $x < a$ e $f(b)$ per $x > b$. Si definisca l'applicazione $\alpha(x) = (b+2-a)x + a - 1$ tra gli insiemi $[0,1]$ e $[a-1, b+1]$ e la funzione $\bar{f}(x) = f(\alpha(x)) \in C([0,1])$. Sia p_n la successione di polinomi approssimanti dati dal punto (a) per $\bar{f}$. Si mostri infine che $p_n(\frac{x-a+1}{b+2-a})$ fornisce la successione di polinomi richiesta dall'esercizio.