Lavoro Guidato N2 di AM2

Integrazione per sostituzione di classi di funzioni trigonometriche

Sia data la funzione trigonometrica $f(x)$ e consideriamo la seguente casistica di sostituzioni speciali:
1) se $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, ove con tale notazione indichiamo che $f(x)$ è funzione di $\sin x$ e $\cos x$, possiamo operare la sostituzione $t = \tan \frac{x}{2}$.
E' possibile esprimere $\sin x$, $\cos x$ e l'elemento d'integrazione dx rispetto alla variabile t, ottenendo

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = d(2 \arctan t) = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Quindi otteniamo

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \frac{2}{1+t^2} dt \ |_{t=\tan \frac{x}{2}}$$

2) se $f(x) = R(\sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x)$, possiamo operare la sostituzione $t = \tan x$.
E' possibile esprimere $\sin^2 x$, $\sin x \cos x$, $\cos^2 x$ e l'elemento d'integrazione dx rispetto alla variabile t, ottenendo

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$dx = d(\arctan t) = \frac{1}{1+t^2} dt$$

Quindi otteniamo

$$\int R(\sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x) dx = \int R(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}) \frac{1}{1+t^2} dt \ |_{t=\tan x}$$

Osservazione 1 Al punto (1) e (2), ci si riconduce allo studio di primitive di funzioni razionali, che può essere eseguito usando le tecniche descritte nella precedente esercitazione.

3) se $f(x) = R(\sin x)\cos x$, possiamo operare la sostituzione $t = \sin x$ e, tenendo presente $dt = \cos x dx$, otteniamo

$$\int R(\sin x)\cos x dx = \int R(t) dt \,|_{t=\sin x}$$

4) se $f(x) = R(\cos x)\sin x$, possiamo operare la sostituzione $t = \cos x$ e, tenendo presente $dt = -\sin x dx$, otteniamo

$$\int R(\cos x)\sin x dx = -\int R(t) dt \,|_{t=\cos x}$$

5) se $f(x) = R(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}$, possiamo operare la sostituzione $t = \tan x$ e, tenendo presente $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$, otteniamo

$$\int R(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x} dx = \int R(t) dt \,|_{t=\tan x}$$

Osservazione 2 Le sostituzioni discusse al punto (3), (4) e (5) si applicano a funzioni integrande scritte in una determinata forma: talvolta, quindi, si dovrà ricondurre la funzione integranda da studiare nella forma giusta per poter applicare una di queste sostituzioni.

Esercizio1
Calcolare la primitiva di $\frac{1}{2\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}$.
Esercizio2
Calcolare la primitiva di $\cos^2 x$.
Esercizio3
Calcolare la primitiva di $\frac{1}{4 - 5\sin x}$.
Esercizio4
Calcolare la primitiva di $\frac{\cos x}{1 + \cos x}$.
Esercizio5
Calcolare la primitiva di $\frac{\sin^3 x}{2 + \cos x}$.
Esercizio6
Calcolare la primitiva di $\frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$.
Esercizio7
Calcolare la primitiva di $\frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\tan x - 1}}$.