

Lavoro Guidato N1 di AM2

Integrazione di funzioni razionali ed iperboliche

Sia data la funzione razionale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi di grado rispettivamente n e m .

Procediamo nel seguente modo:

1) se $n \geq m$, dividiamo il polinomio $P(x)$ per $Q(x)$ ottenendo l'espressione

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

dove $A(x)$ e $R(x)$ sono due polinomi tali che il grado di $R(x)$ è minore di m , e, poiché conosciamo la primitiva di $A(x)$, ci siamo ricondotti a studiare il caso in cui $n < m$;

2) scomponiamo il polinomio $Q(x)$ del denominatore come prodotto di potenze di polinomi di primo grado e di secondo grado con radici complesse coniugate, ossia scriviamo

$$Q(x) = c(x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\mu \dots (x^2+lx+s)^\nu$$

per opportuni c numero reale, a, \dots, b numeri reali distinti, $(p, q), \dots, (l, s)$ coppie di numeri reali distinti con, per esempio, $4q - p^2 > 0$, α, \dots, ν numeri interi positivi;

3) decomponiamo la frazione $\frac{P(x)}{Q(x)}$ per $n < m$ nella forma

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{c} & \left[\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots \right. \\ & \dots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} \\ & + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_\mu x + N_\mu}{(x^2 + px + q)^\mu} + \dots \\ & \left. \dots + \frac{P_1x + Q_1}{x^2 + lx + s} + \frac{P_2x + Q_2}{(x^2 + lx + s)^2} + \dots + \frac{P_\nu x + Q_\nu}{(x^2 + lx + s)^\nu} \right] \end{aligned}$$

Per le funzioni razionali elementari $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{(x-a)^k}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ con $k \geq 2$ intero e $4q - p^2 > 0$, abbiamo le seguenti primitive:

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^k} dx = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \frac{A}{2} \ln |x^2 + px + q| + 2 \frac{2B - Ap}{4q - p^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{A}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right) + C \end{aligned}$$

Per la quarta primitiva, in vista di

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} = -\frac{A}{2(k-1)} \frac{1}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + 4^{k-1} \frac{2B - Ap}{(4q - p^2)^{k-\frac{1}{2}}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^k} \Big|_{t=\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}}$$

ci si può ricondurre a studiare $I_k = \int \frac{1}{(x^2+1)^k}$.

Con un'integrazione per parti, si ottiene

$$I_k = I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)} \int x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{(1+x^2)^{(k-1)}} \right] dx = \frac{2(k-1) - 1}{2(k-1)} I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{(k-1)}}$$

L'ultima relazione ci permette di calcolare in modo ricorsivo il valore di I_k , tenendo presente che $I_1 = \arctan x$.

Al passo (3) si può sostituire il passo (3bis):

(3bis) decomponiamo la frazione $\frac{P(x)}{Q(x)}$ per $n < m$ nella forma

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{1}{c} \left[\frac{A}{x-a} + \dots + \frac{B}{x-b} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \dots + \frac{Px+Q}{x^2+lx+s} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dx} \left(\frac{S(x)}{(x-a)^{\alpha-1} \dots (x-b)^{\beta-1} (x^2+px+q)^{\mu-1} \dots (x^2+lx+s)^{\nu-1}} \right) \right] \end{aligned}$$

ove $S(x)$ è un polinomio a coefficienti da determinare di grado minore di $(\alpha-1) + \dots + (\beta-1) + 2(\mu-1) + \dots + 2(\nu-1) - 1$.

Per ogni polinomio di primo e secondo grado nella decomposizione di $Q(x)$, mettiamo nello sviluppo in frazioni razionali elementari di $\frac{Q(x)}{P(x)}$ rispettivamente un termine della forma $\frac{A}{x-a}$ e $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ ed aggiungiamo poi un ulteriore termine allo sviluppo come derivata del quoziente di $S(x)$ con il prodotto dei medesimi fattori del denominatore $Q(x)$ con l'esponente diminuito di uno, ove $S(x)$ è un polinomio opportuno di grado minore del denominatore.

Esercizio1

Calcolare la primitiva di $\frac{1}{x^2-2x-3}$.

Esercizio2

Calcolare la primitiva di $\frac{3x^2+2x+8}{x^2+6x+11}$.

Esercizio3

Calcolare la primitiva di $\frac{8x^3+6x^2+3x+4}{x^2(x^2+1)}$.

Esercizio4

Calcolare la primitiva di $\frac{3x^4+5x^3+7x^2+x+2}{(x^2+1)^2}$.

Il calcolo di un integrale della forma

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

puó essere ricondotto, mediante trasformazione del trinomio di secondo grado in una somma o differenza di quadrati, ad uno degli integrali seguenti:

$$1) \int R(x, \sqrt{m^2 - z^2}) dz;$$

$$2) \int R(x, \sqrt{m^2 + z^2}) dz;$$

$$3) \int R(x, \sqrt{z^2 - m^2}) dz.$$

Questi ultimi integrali si calcolano rispettivamente per mezzo delle sostituzioni di variabili $z = m \tanh t$, $z = m \sinh t$ e $z = m \cosh t$.

Ricordando le formule $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ e $\cosh(2x) = 2 \cosh^2 x - 1$, svolgere i seguenti esercizi:

Esercizio5

Calcolare la primitiva di $\sqrt{3 - 2x - x^2}$.

Esercizio6

Calcolare la primitiva di $(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}$.