AM2: II ESONERO

1. (Teorema del Dini) Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$. Provare che

$$f_y(x_0, y_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists\, \delta, \sigma > 0,\; \exists\, \varphi \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta), (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)) :$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0), \qquad (x,y) \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\times(y_0-\sigma, y_0+\sigma) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \varphi(x)$$

Provare inoltre che $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

2. (i) Sia $f \in C(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Provare che

$$\lim_{|u| \to +\infty} f(u) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists\, \underline{u} : \quad f(\underline{u}) = \inf_{u \in \mathbf{R}^2} f(u)$$

(ii) Determinare $\inf_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} f(x,y)$ se $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2$

3. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Provare che

(i) $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad f$ é differenziabile in ogni punto

(ii) f é differenziabile in $(x_0, y_0) \quad \Rightarrow \quad \exists\, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, e

$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th_1, y_0+th_2) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2 \quad \forall h = (h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2.$

(iii) Sia $f(x,y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$. É f differenziabile in $(0,0)$?

4. Determinare i numeri complessi z tali che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = i.$

5. Sia $f \in C(\mathbf{R}^2)$ tale che $\exists$ g integrabile in $\mathbf{R}$ con $|f(t,x| \leq g(x)$ $\forall t, x.$

Provare che $t \to \int_{\mathbf{R}} f(t,x)\, dx$ é continua

Formulare inoltre un teorema di derivazione sotto segno di integrale, ed applicarlo allo studio di $\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1}\, e^{-t}\, dt, \quad s > 0$:

(i) $\Gamma \in C^\infty(0, +\infty)$ (ii) Γ é strettamente convessa

(iii) $\Gamma(s) \to_{s\to 0} +\infty, \quad \Gamma(s) \to_{s\to+\infty} +\infty$ (iv) $\Gamma(n+1) = n!.$