AM2: I APPELLO- RECUPERO I ESONERO

1. (Integrale di Gauss). Provare, utilizzando la formula di Wallis, che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

2. (i) Dato $s > 0$, studiare la convergenza puntuale, uniforme, totale, della serie di funzioni (nella variabile t)

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{s-1}\, e^{-nt}, \quad t \in [0, +\infty)$$

(ii) Stabilire per quali $s > 0$ é vero che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} t^{s-1}\, e^{-nt}\, dt = \int_0^{+\infty} (t^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt})\, dt.$$

Dedurre (effettuando un opportuno cambio di variabile) che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, dt$$

3. Sia I_j una famiglia numerabile di intervalli disgiunti aperti e limitati.

É vero che $\chi_{\cup_j I_j}$ é integrabile? Fornire eventualmente un controesempio.

4. Determinare l'insieme di convergenza di ciascuna delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x\ \sin n)^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n+1)]^n x^n$$

5. (i) Discutere le seguenti implicazioni:

(*) $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ esiste finito

(**) $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ esiste finito $\;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty$

(ii) Stabilire quale delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{|\log x^2|^{\frac{1}{2}}}{x^2-1}, \qquad g(x) = \frac{\sin x}{x^2}, \qquad h(x) = \frac{\sin x^2}{x}$$

é integrabile (eventualmente in senso improprio) su tutto $\mathbf{R}$.

6. (i) Provare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2N} t\,dt = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2N-1)!!}{(2N)!!}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2N} t\,dt = 4N^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2N} t\,dt - N(2N-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2N-2} t\,dt$$

(ii) Posto $I_N := \frac{4}{\pi}\,\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2N} t\,dt$, dedurre che $I_{N-1} - I_N = \frac{1}{N^2}$.

(ii) Provare infine , spezzando l'integrale tra $[0,\epsilon]$ e $(\epsilon, \frac{\pi}{2}]$, che $I_N \to_{N\to+\infty} 0$ e concludere che

$$I_1 = \sum_{N=2}^{+\infty} \frac{1}{N^2}$$

(iii) Calcolare $\sum_{N=1}^{+\infty} \frac{1}{N^2}$.