AM2: I APPELLO- RECUPERO II ESONERO

1. (Lemma di Schwartz). Sia $O \subset \mathbf{R}^2$. Provare che

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{in } O$$

2. Provare che $\quad f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad f \quad$ é localmente Lipschitziana

3. Sia $f \in C^2(O)$, O aperto di $\mathbf{R}^2$.

(i) Enunciare e provare la formula di Taylor al secondo ordine per f.

(ii) Utilizzare tale formula per discutere la natura di un punto stazionario di f.

(iii) Sia $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2$. Calcolare il massimo ed il minimo valore che f prende sull'insieme $\{(x,y) : \quad x^4 + y^4 \leq 1\}$

4. (i) Provare che $\quad \exists T > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iT)^n}{n!} = 1, \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \neq 1 \ \ \forall t \in (0,T)$.

(ii) Determinare i numeri complessi z tali che $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = -1.$

5. (Aprossimazione di Weierstrass). Sia $f \in C([a,b])$. Costruire

una successione di polinomi che converga uniformemente ad f in $[a,b]$.