AM2: I APPELLO

1. (Integrale di Gauss). Provare, utilizzando la formula di Wallis, che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

2. (i) Dato $s > 0$, studiare la convergenza puntuale, uniforme, totale, della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} t^{s-1}\, e^{-nt}, \quad t \in [0, +\infty)$

(ii) Stabilire per quali $s > 0$ é vero che $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-nt} dt = \int_0^{+\infty} (t^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}) dt.$

Dedurre (con un cambio di variabile) che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, dt.$

3. Determinare i numeri complessi z tali che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = -1.$

4. (Lemma di Schwartz). Sia $O \subset \mathbf{R}^2$. Provare che

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{in } O$$

5. Sia $f \in C^2(O)$, O aperto di $\mathbf{R}^2$.

(i) Enunciare e provare la formula di Taylor al secondo ordine per f.

(ii) Utilizzare tale formula per discutere la natura di un punto stazionario di f.

(iii) Sia $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2$. Calcolare il massimo ed il minimo valore che f prende sull'insieme $\{(x,y) : \quad x^4 + y^4 \le 1\}$

6. Enunciare teoremi di dipendenza continua e di derivabilitá per integrali dipendenti da parametro ed utilizzare tali teoremi per provare la formula

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$