AM2: Tracce delle lezioni- VIII Settimana

FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

Una funzione reale di due (od n) variabili reali é una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (rispettivamente, di $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$) e a valori in $\mathbf{R}$. Ad esempio, $f(x, y) = ax + by$ (funzione lineare).

Con $\mathbf{R}^2$ si intende infatti il prodotto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (insieme delle coppie ordinate di numeri reali, o vettori $u = (x, y)$) munito della

STRUTTURA ALGEBRICA in $\mathbf{R}^2$:
Se $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2)$, é $\quad u_1 + u_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (addizione)
Se $t \in \mathbf{R}$, é $t(x, y) := (tx, ty)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ (moltiplicazione per uno scalare).

STRUTTURA METRICA in $\mathbf{R}^2$:
Se $u = (x, y)$, $\quad ||u|| := \sqrt{x^2 + y^2}$ (norma di u)
Se $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2)$, é $\quad d(u_1, u_2) := ||u_1 - u_2||$ (distanza tra u_1, u_2.)

COMMENTI.
Come noto, $\mathbf{R}^2$ si rappresenta mediante i punti di un piano cartesiano Oxy. In tale piano, dato un vettore u, l'insieme $\mathbf{R}\, u := \{tu : \; t \in \mathbf{R}\}$ é l'insieme dei punti della retta uscente dall'origine $O := (0, 0)$ e passante per u. Piú in generale, $\{tu + v : \; t \in \mathbf{R}\}$ é la (rappresentazione parametrica della) retta passante per v e parallela alla retta $\mathbf{R}\, u$. In particolare, $u + v$ é il punto comune alle rette $\{tu + v : \; t \in \mathbf{R}\}$ e $\{u + tv : \; t \in \mathbf{R}\}$ e si chiama traslazione di u lungo v.
$||u|| := \sqrt{x^2 + y^2}$ é la lunghezza del segmento che unisce il punto u all'origine (o lunghezza del vettore u), e $d(u, v)$ é la distanza tra i punti u e v.
La funzione distanza soddisfa le proprietá

(i) $\quad 0 \leq d(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^2 \qquad d(u, v) = 0 \;\Leftrightarrow\; u = v$ (positivitá)
(ii) $\quad d(u, v) \;=\; d(v, u) \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^2$ (simmetria)
(iii) $\quad d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \quad \forall u, v, w \in \mathbf{R}^2$ (diseguaglianza triangolare)

Tra la struttura algebrica e la struttura metrica sussistono le seguenti relazioni (di compatibilitá):

(i) $\quad 0 \leq ||u|| \quad \forall u \in \mathbf{R}^2, \quad ||u|| = 0 \;\Leftrightarrow\; u = 0$ (positivitá)
(ii) $\quad ||tu|| = |t|\; ||u|| \quad \forall u \in \mathbf{R}^2, \; t \in \mathbf{R}$ (omogeneitá)
(iii) $\quad ||u + v|| \leq ||u|| + ||v|| \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^2$ (diseguaglianza triangolare).

NOTAZIONE. $D := \{u : \ ||u|| < 1\}$, e, se $r > 0$, $v \in \mathbf{R}^2$:

$D_r := rD := \{ru : u \in D\} = \{u : ||u|| < r\}$, $D_r(v) := D_r + v := \{u + v : u \in D_r\}$

si chiamano disco di raggio r centrato in zero, e, rispettivamente, disco di raggio r centrato in v.

SUCCESSIONI CONVERGENTI in $\mathbf{R}^2$ $\quad u_n \to u \quad \Leftrightarrow \quad ||u_n - u|| \to 0.$

NOTA. (i) Se $u_n = (x_n, y_n)$, $u = (x, y)$, allora $u_n \to u \Leftrightarrow x_n \to x,\ y_n \to y$.
Infatti $\quad ||u_n - u||^2 = |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2$

(ii) $\quad u_n$ converge $\Rightarrow \sup_n ||u_n|| < +\infty$

DEFINIZIONE (insiemi limitati, aperti, chiusi, compatti)

(i) $B \subset \mathbf{R}^2$ é **limitato** se esiste $r > 0 :\ B \subset D_r$

(ii) $O \subset \mathbf{R}^2$ é **aperto** se $\forall u \in O\ \exists r > 0 :\ D_r(u) \subset O$

(ii) $F \subset \mathbf{R}^2$ é **chiuso** se F' é aperto

(iii) $K \subset \mathbf{R}^2$ é **compatto** se é chiuso e limitato

PROPOSIZIONE 1

(i) $F \subset \mathbf{R}^2$ é **chiuso** $\Leftrightarrow$ $(u_n \in F,\ u_n \to u \quad \Rightarrow \quad u \in F)$

(ii) $K \subset \mathbf{R}^2$ é **compatto** $\Leftrightarrow$ $(u_n \in K \quad \Rightarrow \quad \exists\ u_{n_k}, u \in K :\ u_{n_k} \to u)$.

Prova. (i) $\Rightarrow$: $u \notin F \Rightarrow \exists r > 0 :\ D_r(u) \subset F'$ mentre $u_n \in F \cap D_r(u)$ definitivamente. $\Leftarrow$: Se $u \notin F$, deve esistere $r > 0 :\ D_r(u) \subset F'$, altrimenti $\forall n,\ \exists\ u_n \in D_{\frac{1}{n}}(u) \cap F$. Ma $u_n \in F \cap D_{\frac{1}{n}}(u) \Rightarrow u_n \to u \Rightarrow u \in F$.

(ii) $\Rightarrow$: $u_n = (x_n, y_n) \in K \Rightarrow x_n, y_n$ sono limitate e quindi esiste n_k tale che $x_{n_k},\ y_{n_k}$ convergono, diciamo a x, y e quindi u_{n_k} converge a $u = (x, y) \in K$ perché K é chiuso. $\Leftarrow$: Se K é non limitato, esiste $u_n \in K$ con $||u_n|| \to +\infty$. Per ogni estratta u_{n_k} é ugualmente vero che $||u_{n_k}|| \to_k +\infty$ e quindi u_{n_k} non puó convergere (sarebbe limitata !). Se K non é chiuso, esiste $u \notin K$ e $u_n \in K$ con $u_n \to u$ e quindi u_n non ha sottosuccessioni convergenti in K.

DEFINIZIONE (di limite) Sia $f: A \to \mathbf{R}, A \subset \mathbf{R}^2$, $\dot{D}_r(u) = D_r(u) \backslash \{u\}$.

Sia u_0 tale che $\dot{D}_r(u_0) \cap A$ é non vuoto $\forall r > 0$. Allora

$$\lim_{u \to u_0} f = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0: \quad u \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{u \to u_0} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0: \quad u \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow f(u) \geq M)$$

Se $D'_r \cap A$ é non vuoto per ogni $r > 0$, allora

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathbf{R}_\epsilon > 0: \quad u \in A,\ ||u|| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0,\ \exists R_M > 0: \quad u \in A,\ ||u|| \geq R_M \Rightarrow f(u) \geq M)$$

NOTA. Come per le funzioni di una variabile si vede facilmente che

(i) f ha limite l per u tendente a u_0 ($|u|$ tendente a $+\infty$) $\Leftrightarrow$

$$(u_n \in A,\ u_n \neq u_0,\ u_n \to u_0 \ \ (|u_n| \to +\infty\ ) \Rightarrow f(u_n) \to l)$$

(ii) f ha limite l per u tendente a u_0 $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0: \quad u, v \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

f ha limite l per $|u|$ tendente a $+\infty$ $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0,\ \exists R_\epsilon > 0: \quad u, v \in A,\ |u|, |v| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

DUE ESEMPI . **(i)** Sia $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$.

Dalla NOTA-(i) si vede subito che $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)\ \forall u_0 \neq 0$. Invece,

$\lim_{u \to 0} f(u)$ e $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esistono: $f(tx, ty) \equiv \frac{xy}{x^2+y^2}$

(ii) Sia $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$. Come sopra, $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)\ \forall u_0 \neq 0$. Ed é anche $\lim_{u \to 0} f(u) = 0$: $|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}| \leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$;

alternativamente, in coordinate polari: $|f(r\cos t, r\sin t)| = r\cos^2 t |\sin t| \leq r$.

Infine, $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esiste: $f(x, tx) = \frac{tx^3}{x^2(1+t^2)} \to_{t \to \infty} 0$

mentre $f(tx, x) = \frac{t^2 x^3}{x^2(1+t^2)} \to_{t \to \infty} x$.

DEFINIZIONE (continuitá) Sia $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$, $u_0 \in A$.

f é continua in u_0 se $\lim\limits_{u \to u_0} f$ esiste e $\lim\limits_{u \to u_0} f = f(u_0)$.

f é continua in A se é continua in ogni punto di A.

$C(A)$ indicherá la classe delle funzioni continue in A.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $f \in C(K)$, $K \subset \mathbf{R}^2$, compatto. Allora

$\sup\limits_K |f| < +\infty$, ed esistono $\overline{u} \in K$, $\underline{u} \in K$: $f(\underline{u}) = \inf\limits_K f$, $f(\overline{u}) = \sup\limits_K f$

Prova. Sia $u_n \in K$: $f(u_n) \to \sup_K f$. Possiamo supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che $u_n \to u$ per un $u \in K$. Da $f(u_n) \to f(u)$ segue che $\sup_K f = f(u) < +\infty$.

UNIFORME CONTINUITÁ, TEOREMA DI HEINE-CANTOR

Sia $f \in C(K)$, $K \subset \mathbf{R}^2$ compatto. Allora f é **uniformemente continua** in K:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad (u, v \in K, \ \ ||u - v|| \le \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(u) - f(v)| \le \epsilon)$$

Prova. Se no, esistono $\epsilon_0 > 0$ e punti $u_n, v_n \in K$ tali che $|f(u_n) - f(v_n)| \ge \epsilon_0$, $||u_n - v_n|| \le \frac{1}{n}$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $u_n \to u$, $v_n \to v$ per certi $u, v \in K$. Ma $||u - v|| \le ||u - u_n|| + ||u_n - v_n|| + ||v_n - v||$ $\forall n$ $\Rightarrow$ $u = v$ $\Rightarrow$ $0 = |f(u) - f(v)| \ge \epsilon_0$, contraddizione.

CONNESSIONE $A \subset \mathbf{R}^2$ é connesso per archi se $\forall\, u, v \in \mathbf{R}^2$, esiste in A un cammino continuo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $x, y \in C([0,1])$:

$$\gamma(t) \in A \ \ \forall t \in [0,1], \ \ \gamma(0) = (x(0), y(0)) = u, \ \ \gamma(1) = (x(1), y(1)) = v$$

É vero che: A connesso per archi, $f \in C(A)$, $\Rightarrow$ $f(A)$ é un intervallo.

Prova. Sia $a = f(u)$, $b = f(v)$, $u, v \in A$. Siano $x(t)$, $y(t)$ continue in $[0,1]$ tali che $\gamma(t) := (x(t), y(t)) \in A$ $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$. La tesi segue dal fatto che $t \to f(\gamma(t))$ é continua in $[0,1]$ e quindi $[a, b] \subset f \circ \gamma([0,1])$ (teorema del valore intermedio!).

ESEMPI E COMPLEMENTI

1. Siano O_α, F_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ famiglie di aperti, chiusi. Allora

$$\bigcup_\alpha O_\alpha \quad \text{é aperto,} \qquad \bigcap_\alpha F_\alpha \quad \text{é chiuso.}$$

Infatti, $u \in \bigcup_\alpha O_\alpha \;\Rightarrow\; \exists \alpha : u \in O_\alpha \;\Rightarrow\; \exists\; D_r(u) \subset O_\alpha \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$.
Poi, $(\bigcap_\alpha F_\alpha)' = \bigcup_\alpha F'_\alpha$.

2. $\overline{A} := \bigcap_{F:\ A\subset F,\, F \text{ chiuso}} F$, il piú piccolo chiuso contenente A, si chiama **chiusura** di A.
Chiaramente, F é chiuso $\Leftrightarrow F = \overline{F}$.

3. $u \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; \exists u_n \in A : u_n \to u$. Infatti, $u \in \overline{A} \;\Rightarrow\; D_r(u) \cap A \neq \emptyset \;\; \forall r > 0$, altrimenti $\exists r > 0 :\; A \subset D'_r$ e quindi $u \in \overline{A} \subset D'_r$, contraddizione. Da $D_{\frac{1}{n}}(u) \cap A \neq \emptyset \;\forall n$, segue che esiste $u_n \in A :\; u_n \to u$.
Viceversa, $u_n \in A \subset F$ chiuso, $u_n \to u \;\Rightarrow\; u \in F \;\Rightarrow\; u \in \overline{A}$.

4. $\mathit{int}\, A := \{u \in A :\; \exists D_r(u) \subset A\}$, $\partial A := \overline{A} \setminus \mathit{int}\, A$. Provare che

$$\partial A = \{u :\; D_r(u) \cap A \neq \emptyset \neq D_r(u) \cap A' \;\; \forall r > 0\}$$

Sia $u \in \partial A$. $\forall r > 0, D_r \cap A' \neq \emptyset$ perché u non é interno e $D_r \cap A \neq \emptyset$ perché $u \in \overline{A}$. Viceversa, $D_r \cap A' \neq \emptyset \forall r > 0 \Rightarrow u$ non é interno e $D_r \cap A \neq \emptyset \forall r > 0 \Rightarrow u \in \overline{A}$.

5. Sia O aperto. Siano $x, y \in C([0,1])$ tali che $(x(0), y(0) \in O$, $(x(1), y(1) \ni \overline{O}$.
Provare che $\exists t \in [0,1] :\; (x(t), y(t)) \in \partial O$.

Sia $\overline{t} := \sup\{\tau \in [0,1] :\; (x(t), y(t)) \in O \;\; \forall s \leq \tau\}$, insieme non vuoto perché x, y sono continue, $(x(0), y(0) \in O$ e O é aperto. Per ragioni analoghe, $t < 1$ e $(x(\overline{t}), y(\overline{t})) \in \partial O$

6. Sia $0 \leq \varphi \in C_0^\infty((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))$, $\sup_{x\in\mathbf{R}} \varphi = \varphi(\frac{1}{2}) = 1$
Sia $f(x,y) = \varphi(\frac{x^2}{y})$ se $y \neq 0$, $f(x,0) = 0 \;\; \forall x$. Si ha:

$\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) \;\forall\; u_0 \neq 0$, mentre
$\lim\limits_{u\to 0} f(u)$ e $\lim\limits_{|u|\to+\infty} f(u)$ non esistono: $f(x, 2x^2) \equiv \varphi(\frac{1}{2}) \;\; \forall x \neq 0$

Notiamo che $f(tx, ty) = \varphi(\frac{tx^2}{y}) \to 0$ al tendere di t a zero, ma non in modo uniforme (rispetto x, y). Ad esempio, $\sup\limits_{x^2+y^2=r^2} f(x,y)$ é realizzato in

$y = \sqrt{1+r^2} - 1$, $x = \pm\sqrt{\frac{y}{2}}$ e vale $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$ (in coordinate polari: $f(\cos t, r\sin t) = \varphi(r\frac{\cos^2 t}{\sin t}) = 1$ se si prende t tale che $\frac{\cos^2 t}{\sin t} = \frac{1}{2r}$).

Notiamo anche che $x \to 0 \Rightarrow f(x,y) \to 0\ \forall y$, ma non uniformemente in $y \in [0,\delta]$, quale che sia $\delta > 0$: $\sup_{y\in[0,\delta]} f(x,y) = 1$ se x é piccolo.

7. Sia $0 \le \varphi \in C_0^\infty((-\pi,\pi))$, $\sup_{x\in\mathbf{R}} \varphi = \varphi(\pm\frac{1}{2}) = 1$, $\varphi \equiv 0$ in $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Sia $f(x,y) = \varphi(\frac{|\arctan\frac{y}{x}|}{\sqrt{x^2+y^2}})$ se $x \ne 0$, $f(0,y) = \varphi(\frac{\pi}{2y})$ se $y \ne 0$, $f(0,0) = 0$.

Anche in questo caso $\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$ se $u_0 \ne 0$ mentre $\lim_{u\to 0} f(u)$ non esiste.

Infatti $f(x,mx) = \varphi(\frac{|\arctan m|}{|x|(1+m^2)}) \to 0$ al tendere di x a zero: f va a zero lungo i raggi ma non in modo uniforme :

se $x = r\cos t, y = r\sin t$, $t \in (-\pi,\pi)$ $\sup_{x^2+y^2=r^2} f(x,y) = \sup_{t\in(-\pi,\pi)} \varphi(\frac{|t|}{r}) = \varphi(\frac{1}{2}) = 1$.

8. Problema Sia $f : D_r \to \mathbf{R}$ tale che $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$, $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$ esistano entrambi. Sono tali limiti necessariamente uguali? In caso negativo, l'essere uguali comporta che esiste $\lim_{u\to 0} f(u)$?

Risposta: in generale no. Ad esempio, se $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \ne 0$, $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$, $\forall y \ne 0$ mentre $\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1\ \forall y \ne 0$. Ugualmente, il fatto che siano uguali non comporta l'esistenza di $\lim f$ in zero, é ad esempio il caso di $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

9 Continuitá.

Negli esempi precedenti, le funzioni sono tutte continue in $u \ne 0$ e discontinue in $u = 0$ (ad eccezione di Esempi-(ii)).

Come nel caso di funzioni di una variabile, la somma, il prodotto di funzioni continue é una funzione continua. Se f, g sono continue in u_0 e $g(u_0) \ne 0$, allora $\frac{f}{g}$ é continua in u_0.

Sia $t \to \varphi(t)$ integrabile in $[a,b]$. Allora $f(x,y) := \int_x^y \varphi(t)\,dt$ é continua in $[a,b]\times[a,b]$. Infatti $\int_{x_n}^{y_n} \varphi(t)\,dt = \int_a^{y_n} \varphi(t)\,dt - \int_{x_n}^{a} \varphi(t)\,dt$.

Se f é continua in A, allora le funzioni di una variabile

$$x \to f(x,y),\quad \{x:\ (x,y)\in A\}, \qquad y \to f(x,y),\quad \{y:\ (x,y)\in A\}$$

(dipendenti dal parametro y, rispettivamente x), sono continue .

Una funzione f avente tale proprietá si dice continua (separatamente) in x ed y; dunque, una funzione continua é anche 'separatamente continua'.

É tuttavia in generale falso che una funzione, continua separatamente in x, y, risulti continua 'nel complesso delle variabili'(piú brevemente: continua).

Negli esempi precedenti, le funzioni sono continue in x ed y (separatamente !) anche in $(0,0)$ (nell'esempio (i) occorre porre $f(0,0)=0$) ma non sono continue in 0. Se modifichiamo la f dell'esempio (ii) in

$$f(x,y)=\varphi(\tfrac{x^2}{y})\tfrac{1}{y} \quad \text{se } y\neq 0, \quad f(x,0)=0 \quad \forall x,$$

otteniamo una funzione ancora continua in x e y (separatamente), ma ora addirittura $\sup\limits_{x^2+y^2\leq r} f = +\infty$ cosa che non puó ovviamente accadere se f é continua (od ha un limite finito) in zero: se f ha un limite finito in u_0, f é limitata sui dischi (opportunamente piccoli) centrati in u_0.

9 Problema. Sia $f(t,x)$ definita in $(t_0-\delta,t_0+\delta)\times[0,1])$. Supponiamo che $x\to f(t,x)$ sia integrabile in $[a,b]$, $\forall t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$.

Sotto quali ipotesi la funzione $t\to\int\limits_a^b f(t,x)\,dx$ é continua? Ovvero,

$$t_n\to t \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(t_n,x)\,dx \;\to\; \int\limits_a^b f(t,x)\,dx \ ?$$

Una ipotesi naturale é che $t\to f(t,x)$ sia continua per ogni $x\in[a,b]$. Tale ipotesi non é tuttavia sufficente, in generale. Ad esempio, sia

$$f(x,y)=\varphi(\tfrac{x^2}{y})\tfrac{1}{\sqrt{y}} \quad \text{se } y\neq 0, \quad f(x,0)=0 \quad \forall x, \qquad \varphi \text{ come nell'esempio (ii).}$$

f é 'separatamente' continua in x,y, ma

$$\int\limits_0^1 f(x,y)dx=\int\limits_0^1\varphi(\tfrac{x^2}{y})\tfrac{1}{\sqrt{y}}\,dx=\int\limits_0^{\frac{1}{y}}\tfrac{\varphi(\tau)}{2\sqrt{\tau}}\,d\tau \;\to_{y\to 0}\; \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\tfrac{\varphi(\tau)}{\sqrt{\tau}}\,d\tau\neq 0$$

mentre $\int\limits_0^1\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)dx=0$ perché $\varphi(\tfrac{x^2}{y})\tfrac{1}{\sqrt{y}}\to_{y\to 0} 0, \quad \forall x.$

10. Esercizio Sia $f \in C([a,b]\times[c,d])$. Provare che $t_n \in [a,b],\ t_n \to t \ \Rightarrow$ $f_n(x) := f(t_n, x)$ converge a $g(x) := f(t,x)$ uniformemente in $[c,d]$.

Per Heine-Cantor, $|f(t_n,x) - f(t,x)| \le \epsilon$ se $|t_n - t| \le \delta_\epsilon$

11. Proposizione Se $f \in C([t_0-\delta, t_0+\delta]\times[0,1])$, allora

$$t \to \int\limits_a^b f(t,x)\,dx \quad \text{é continua in} \quad [t_0-\delta, t_0+\delta]$$

Prova. $t_n \in [a,b],\ t_n \to t \ \Rightarrow \ f(t_n,x) \to f(t,x)$ uniformemente in $[c,d]$.

NOTA. La dimostrazione non funziona se si sostituisce l'intervallo $[a,b]$ con un intervallo non limitato, ed in effetti il risultato é falso, in generale:

Sia $0 \le \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $f(t,x) = \varphi(x + \frac{1}{t^2})$ se $t \ne 0$, $f(0,x) \equiv 0$.

Chiaramente f é continua in (t,x) se $t \ne 0$. Inoltre, $x_n \to x, t_n \to 0 \Rightarrow$ $\varphi(x_n + \frac{1}{t_n^2}) = 0$ definitivamente. Tuttavia

$$\int\limits_{\mathbf{R}} f(t,x)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x + \frac{1}{t^2})\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,dx$$

La limitatezza di $[a,b]$ puó essere sostituita da una ipotesi di equidominatezza:

$\exists g \ge 0$, integrabile in $[a,b]$ tale che $|f(t,x)| \le g(x)$, $\forall x, t$.

Infatti f continua, $t_n \to t \ \Rightarrow \ f(t_n, .) \to f(t,.))$ uniformemente sui limitati .

10. Convoluzione Siano g integrabile in $\mathbf{R}$ e $f \in C_0(\mathbf{R})$. Allora

$$(g \star f)(x) := \int\limits_{\mathbf{R}} g(y)\,f(x-y)\,dy$$

é continua. Infatti $\forall\epsilon,\ \exists\delta_\epsilon > 0 :\ |x_n - x| \le \delta_\epsilon \ \Rightarrow$ $\int\limits_{\mathbf{R}} |g(y)|\,|\,f(x_n-y) - f(x-y|\,dy \le \epsilon \int\limits_{\mathbf{R}} |g(y)|$ perché f, essendo continua e a supporto compatto, é infatti uniformemente continua su tutto $\mathbf{R}$.