AM2: Tracce delle lezioni- V Settimana

SERIE DI FUNZIONI. Date $a_n(x), x \in E$, si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge puntualmente in E se la successione delle somme parziali $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_n(x)$ converge puntualmente in E e si scrive

$$S(x) \ := \ \lim_{n\to\infty} S_n(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

UN ESEMPIO IMPORTANTE: le serie di potenze.

Serie uniformemente convergenti. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ si dice uniformemente convergente in E se $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_n(x)$ converge uniformemente in E

Criterio di Cauchy . La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge uniformemente in E se e solo se

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_\epsilon : \ \ n \geq n_\epsilon, p \in \mathbf{N} \ \ \Rightarrow \ \sup_{x\in E} |\sum_{j=n}^{n+p} a_j(x)| \leq \epsilon$$

Serie totalmente convergenti. La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ si dice totalmente convergente in E se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in E} |a_n(x)| < +\infty$$

ESEMPI di serie uniformemente convergenti ma non totalmente convergenti.

1. Se $a_n(x) \equiv \frac{(-1)^n}{n}$, é $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge, ovviamente uniformemente , ma non totalmente convergente, perché é assolutamente divergente.).

2. sia $f \in C(\mathbf{R})$, nulla fuori di $(0,1)$, $a_n(x) := \frac{1}{n} f(x-n)$. La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(x-n)$ converge alla funzione $S(x)$ che vale $\frac{1}{n} f(x-n)$ in $[n, n+1]$ e zero se $x \leq 0$. Inoltre la convergenza é uniforme in $\mathbf{R}$, perché $|S(x) - S_n(x)| = |\sum_{j>n} \frac{1}{j} f(x-j)| \leq \frac{1}{n+1} \sup|f| \to 0$. La convergenza peró non é totale, perché $\sup|a_n| \frac{1}{n} \sup|f|$.

UN ESEMPIO IMPORTANTE: una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avente raggio di convergenza r converge totalmente in $[-\delta, \delta]$, $\ \forall \delta < r$.

Infatti $\sum_0^{\infty} |a_n| \delta^n < +\infty$ e $\sup\limits_{|x|\leq\delta} |a_n x^n| = |a_n| \delta^n$.

Proposizione : la totale convergenza implica l'uniforme convergenza:

$\sum_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{x\in E} |a_n(x)| < +\infty \Rightarrow |\sum\limits_{j=n}^{n+p} a_j(x)| \leq \sum\limits_{j=n}^{n+p} |a_j(x)| \leq \sum\limits_{j=n}^{n+p} \sup\limits_{x\in E} |a_n(x)| \leq \epsilon \forall x \in E.$

Teorema .

(i) se $a_n(x)$ sono funzioni continue in E e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é uniformemente convergente in E, allora $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é continua in E.

(ii) se a_n sono funzioni integrabili in $[a, b]$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é uniformemente convergente in $[a, b]$, allora $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é integrabile in $[a, b]$ e

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx$$

(iii) se $a_n \in C^1(I)$, se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge in qualche punto di I e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ converge uniformemente in I, allora

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dx}(x)$$

La somma di una serie di potenze é una funzione C^{∞}.

Le $a_n(x) := a_n x^n$ sono funzioni C^{∞} e la serie delle derivate k-esime

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} x^j$$

é anch'essa serie di potenze ed il suo raggio di convergenza é

$$(\limsup_n |n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} = (\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}.$$

UN ESEMPIO: $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{d^k}{dx^k}(\frac{1}{1-x}) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} x^j, \quad \forall x \in (-1, 1).$

Funzioni analitiche. Una funzione f si dice analitica in un intervallo aperto I se é localmente somma di una serie di potenze:

$$\forall x_0 \in I, \exists r(x_0) > 0 \text{ tale che } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ in } (x_0 - r(x_0), x_0 + r(x_0)).$$

NOTA. Una funzione analitica in I, essendo localmente somma di una serie di potenze, é $C^{\infty}(I)$. In particolare, $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ é la serie di taylor di f attorno a x_0. Tuttavia non tutte le funzioni $C^{\infty}(I)$ sono analitiche in I.

La somma di una serie di potenze é una funzione analitica.

Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza r, e siano $0 < \underline{r} < \overline{r} < r$. Da $\limsup_k |a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{r}$ segue che

$$\exists\ \overline{k}: \qquad |a_{j+k}| \ \leq\ \frac{1}{\overline{r}^{j+k}}, \qquad \forall k \geq \overline{k},\ \ \forall j \in \mathbf{N}$$

Da $\qquad f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, a_{j+k}\, x^j \qquad$ segue

$$|x| \ \leq\ \underline{r} \ \Rightarrow \quad |f^{(k)}(x)| \ \leq\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\ \frac{\underline{r}^j}{\overline{r}^j}\ \ \frac{1}{\overline{r}^k}$$

Usando ora la formula $\quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, x^j = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1,1), \quad$ otteniamo

$$|f^{(k)}(x)| \ \leq\ \frac{k!}{\overline{r}^k (1\ -\ \underline{r}\ \ \overline{r}^{-1})^{k+1}} \ =\ \frac{\overline{r}\ k!}{(\overline{r}\ -\ \underline{r})^{k+1}}, \qquad \forall k \geq \overline{k},\ \ |x| \leq \underline{r}$$

Come noto, tale stima assicura che f é sviluppabile in serie di Taylor (di raggio di convergenza almeno $\overline{r} - \underline{r}$) attorno ad ogni punto dell'intervallo $[-\underline{r}, \underline{r}]$.

NOTA. Una funzione analitica in I non é peró, in generale, somma di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ convergente in I. Ad esempio, $\log x$ é analitica in $(0, +\infty)$, perché, se $x_0 > 0$,

$$\log x = \log x_0 + \log(1 + \frac{x - x_0}{x_0}) = \log x_0 + \sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n x_0^n}(x - x_0)^n \quad \text{se} \quad |x - x_0| < x_0$$

Ma se una serie di potenze converge in $(0, +\infty)$ deve convergere su tutto $\mathbf{R}$ e la sua somma, essendo una funzione $C^\infty(\mathbf{R})$, non puó coincidere con $\log x$ in $(0, +\infty)$.

Esempi, problemi e complementi.

1. Proprietá di $\qquad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x > 0$

La f é continua perché la serie converge totalmente in $[1 + \delta, +\infty)$, $\ \forall \delta > 0$:

$$x \geq 1 + \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}} \quad \text{e} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} < +\infty.$$

NOTA. La convergenza non é peró uniforme in $(1,+\infty)$:

$$R_N(x) := \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geq \int_N^{\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{(x-1)\,N^{x-1}} \quad \Rightarrow \quad R_N(1+\frac{1}{N}) \geq N^{1-\frac{1}{N}}$$

cioé la serie non soddisfa la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme in $(1,+\infty)$). Che la convergenza non sia uniforme lo si vede anche dal fatto che $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$: infatti f é decrescente e

$$f(1+\tfrac{1}{N}) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\,N^{\frac{1}{N}}} \geq \frac{\log N}{2N^{\frac{1}{N}}} \qquad \text{Ma:}$$

Limitatezza del limite uniforme Se f_n sono limitate ed uniformemente convergenti ad f in A, allora f 'e limitata.

Infatti, $|f(x)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)| \leq 1 + \sup_{x\in A}|f_n(x)|, \quad \forall x \in A$ se n é abbastanza grande.

Che $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, lo si vede anche dal confronto con $\int_1^\infty \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$. Siccome $g : t \to \frac{1}{t^x}$ é decrescente, abbiamo che $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^\infty \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

Dalla diseguaglianza di sinistra, vediamo poi che $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \to_{x\to+\infty} 0$. Questo fatto si puó anche derivare dalla

Proprietá Se f_n converge uniformemente ad f in $[a,+\infty)$ ed $f_n(x) \to_{x\to+\infty} 0, \ \forall n$, allora $f(x) \to_{x\to+\infty} 0$.

Infatti, $|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \epsilon + |f_n(x)|$ se $n \geq n_\epsilon$ e quindi $\limsup_{x\to+\infty} |f(x)| \leq \epsilon, \ \forall \epsilon > 0$.

Infine, $f \in C^\infty((1,+\infty))$. Infatti la serie delle derivate k-esime, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\log n)^k}{n^x}$ é totalmente convergente in $[1+\delta,+\infty)$: $x \geq 1+\delta \Rightarrow \frac{(\log n)^k}{n^x} \leq \frac{(\log n)^k}{n^{1+\delta}}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^{1+\delta}} < +\infty$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^r e^{-nx} = \frac{x^r}{1-e^{-x}}$ converge totalmente in $[0,+\infty)$ se e solo se $r > 1$: $(x^r e^{-nx})' = rx^{r-1}e^{-nx} - nx^r e^{-nx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{r}{n} \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\geq 0} x^r e^{-nx} = (\frac{r}{n})^r e^{-r}$

3. Provare, con una integrazione per serie, che $\int\limits_0^\infty \frac{t^2}{e^t-1}\,dt = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$.

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{e^t-1}dt = \int_0^\infty \frac{t^2 e^{-t}}{1-e^{-t}}dt = \int_0^\infty t^2 e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-tn}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty t^2 e^{-(n+1)t}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$$

NOTA. Se $f_n \geq 0$ in $[a,+\infty)$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente sui limitati allora $\int\limits_a^{\infty}[\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)]\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^{\infty} f_n(x)\,dx$. Infatti, se $\int\limits_a^{\infty}[\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)]\,dx < +\infty$, da $\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ segue che la successione delle somme parziali é equidominata e quindi é lecito il passaggio al limite sotto segno di inegrale. Se invece $\int\limits_a^{\infty}[\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)]\,dx = +\infty$, allora $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^{R} f_n(x)\,dx = \int\limits_a^{R}[\sum\limits_{n=1}^{i} nfty\, f_n(x)]\,dx \to_{R\to+\infty} +\infty$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\cos\frac{x}{n})$ non converge per alcun x (il termine n-esimo non va a zero) mentre la serie delle derivate $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$ converge totalmente sui limitati: $|\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}| \leq \frac{|x|}{n^2}$, ma non converge uniformemente in $\mathbf{R}$, perché $S_N(x) := \sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$ non é Cauchy uniforme:

$$S_{2N}(N) - S_{N-1}(N) = \sum_{N}^{2N}\frac{1}{n}\sin\frac{N}{n} \geq \sin\frac{1}{2}\sum_{N}^{2N}\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$$

4. (**Criterio di Leibnitz**). Provare che $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\,e^{-\frac{x^2}{n}}$ é derivabile termine a termine.

La serie converge $\forall x$ per il criterio di Leibnitz: se $a_n(x) := \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{\sqrt{n}}$, é

$$\frac{a_n(x)}{a_{n+1}(x)} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}\,e^{-\frac{x^2}{n(n+1)}} = (1+\frac{1}{2n}+\circ(\frac{1}{n}))(1-\frac{x^2}{n(n+1)}+\circ(\frac{1}{n^2})) > 1 \quad (*)$$

Poi, $(*) \;\Rightarrow\; |\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\,e^{-\frac{x^2}{k}}| \leq \frac{e^{-\frac{x^2}{n+1}}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\Rightarrow$ la convergenza é uniforme (ma non é totale: la serie é assolutamente divergente $\forall\, x$!)

La serie delle derivate $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}\,x\,e^{-\frac{x^2}{n}}$ é totalmente convergente sui limitati: $|x| \leq M \Rightarrow |\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}\,x\,e^{-\frac{x^2}{n}}| \leq M\frac{1}{n\sqrt{n}}$. Inoltre, verifica anch'essa la condizione di Leibnitz, e quindi: $2\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}\,x\,e^{-\frac{x^2}{n}} \leq 2\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\,x\,e^{-\frac{x^2}{n}} \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}\,e^{-\frac{1}{2}}$ e quindi converge uniformemente: la serie data é derivabile termine a termine

6. Sia $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, $|x| < 1$. Calcolare $\frac{d}{dx}[x^2 f'(x)]$ e determinare quindi f.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1} \;\Rightarrow\; x^2 f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}[x^2 f'(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$$

$\Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{\log(1-x)}{x^2} = -\frac{1}{x} + (\frac{\log(1-x)}{x})' + \frac{1}{x(1-x)} = (\frac{\log(1-x)}{x})' + \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow$
$f(x) = \frac{\log(1-x)}{x} - \log(1-x) + 1$

7. $\log(x+1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \to_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Segue da

Teorema di Abel Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge in $x=1$, allora converge uniformemente in $[0,1]$. In particolare $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n \to_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nel problema proposto, si puó piú semplicemente procedere cosí:

$$|\log 2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}| = |\log(1+x) - \left[\int_1^x (\frac{1}{1+t} - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n t^n)\, dt\right] - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}| \leq$$

$$|\log(1+x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}| + \int_x^1 \frac{|t|^n}{1+t}\, dt \to_n 0$$

Teorema di Dini Sia $f_n \in C([0,1]), 0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x),\ \forall n \in \mathbf{N}, x \in [0,1]$. Allora

$$f_n(x) \to 0 \ \ \forall x \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad f_n \quad \text{converge uniformemente a zero}$$

Sia $f_n(x_n) = \max f_n$ e supponiamo per assurdo che $f_n(x_n) \geq r > 0$ per infiniti indici. Eventualmente passando ad una sottosuccessione, posiamo supporre che $x_n \to x_0$ per un x_0 e $f_n(x_n) \geq r \ \ \forall n$. Sia n_0 tale che $f_{n_0}(x_0) \leq \frac{r}{4}$ e $\delta(n_0)$ tale che $f_{n_0}(x) \leq \frac{r}{2}$ se $|x - x_0| \leq \delta(n_0)$. Ma allora $f_n(x) \leq \frac{r}{2} \ \ \forall n \geq n_0$ e $|x - x_0| \leq \delta(n_0)$ e quindi anche in x_n, se n é abbastanza grande, contraddizione.

8. Siano $0 \leq f_n \in C((a,b))$, e sia $f(x) := \sum f_n(x)$. Provare che se f é continua in (a,b) allora

$$\int_a^b \sum f_n(x)\, dx = \sum \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Dal teorema di Dini, applicato a $f - \sum_{k=1}^{n} f_k$, segue che la convergenza della serie delle f_n é uniforme in ogni intervallo compatto. Allora, se $\int\limits_a^b f < +\infty$, il passaggio al limite é lecito per equidominatezza. Se invece $\int\limits_a^b f = +\infty$, é $\int\limits_\alpha^\beta f \geq M$ per α, β opportuni, e quindi $\sum \int\limits_\alpha^\beta f_n(x)\, dx \geq M$ in virtú dela uniforme convergenza.

Principio di identitá Siano f, g analitiche in (a, b). Allora

$$\exists\, x_0 \in (a,b): \quad f^{(n)}(x_0) \;=\; g^{(n)}(x_0) \;\; \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad f \equiv g \;\, \text{in}(a,b)$$

Dall'analiticitá: $\exists \delta > 0 : f \equiv g$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, e quindi $b' := \sup\{x < b : \;\; f(t) = g(t) \;\; \forall t \in [x_0, x]\} \geq x_0 + \delta > x_0$. Ora, $x < b' \Rightarrow f \equiv g$ in $[x_0, x] \Rightarrow f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ in $[x_0, b')$, $\forall n$. Se fosse $b' < b$, sarebbe allora, per continuitá, $f^{(n)}(b') = g^{(n)}(b')$ $\forall n$ e quindi $f \equiv g$ in un intorno di b', contraddicendo la natura di sup di b'.