AM2: Tracce delle lezioni- IV Settimana

SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR

FORMULA DI TAYLOR Sia $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$. Allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}(x-x_0)^{n+1} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx+(1-t)x_0)dt$$

Infatti, sia $\varphi(t) := f(tx+(1-t)x_0)$, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. É $\varphi \in C^\infty([0,1])$ e

$\varphi(1) = f(x)$, $\varphi(0) = f(x_0)$, $\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(tx+(1-t)(x_0)(x-x_0)^k)$.

La formula di Taylor per φ

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \varphi^{(n+1)}(t)dt$$

dá la formula voluta per f.

NOTA.

(i) $R_n(x,x_0) := \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx+(1-t)x_0)dt$, resto nella formula di Taylor per f, di ordine n e di punto iniziale x_0 , é infinitesimo di ordine $n+1$.
Effettuando il cambio di variabile $t = \frac{\tau-x_0}{x-x_0}$ si ha anche

$$R_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(\tau)(x-\tau)^n d\tau$$

(ii) $R_n(x,x_0) := \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{t}x+(1-\bar{t})x_0)$ per un $\bar{t} \in [0,1]$.

É questa la rappresentazione del resto nella forma di Lagrange, e segue dalla rappresentazione del resto in forma integrale e dal teorema della media.

ESEMPI (prenderemo $x_0 = 0$)

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\forall x$. Infatti, $R_n(x) = \frac{1}{n!}|\int_0^x e^t(x-t)^n dt|$
$\leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ per n che tende all'infinito.

2. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall x \in (-1,1)$.

Infatti, $\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{1-x} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ e $1-t \le 1-tx \quad 1-tx \ge 1-|x| \quad \Rightarrow$

$|R_n(x)| = (n+1)\int_0^1 \frac{(1-t)^n|x|^{n+1}}{(1-tx)^{n+1}}dt \le (n+1)\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0 \quad \forall x \in (-1,1)$

3. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad \forall x \in (-1,1)$. Infatti

$\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \Rightarrow |R_n(x)| \le$

$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}|x|^{n+1}\int_0^1 [\frac{1-t}{1+tx}]^n(1+tx)^{\alpha-1}dt \le \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}|x|^{n+1}\int_0^1(1+tx)^{\alpha-1}dt \to 0$

perché $1-t \le 1+tx \ \forall x \in (-1,1)$ e $\int_0^1(1+tx)^{\alpha-1}dt < +\infty$.

SERIE DI TAYLOR Sia $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ si chiama serie di Taylor di f di punto iniziale x_0 ed f si dice **sviluppabile in serie di Taylor** attorno ad x_0 se

$$\exists r > 0: \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r)$$

QUESTIONE: $f \in C^\infty((-\delta,\delta))$ é necessariamente sviluppabile in serie di Taylor attorno a $x_0 = 0$? La risposta é, in generale, negativa. Ad esempio

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ é C^∞, con derivate di ogni ordine uguali a zero in $x = 0$: dunque f non é somma della sua serie di Taylor.

Proposizione Sia $f \in C^\infty([a,b])$. Se

$$\exists M, r > 0: \quad \sup_{[a,b]}|f^{(n)}(x)| \le \frac{Mn!}{r^n} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}$$

allora , fissato $x_0 \in (a,b)$, si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r) \cap [a,b]$$

Dimostrazione. Si tratta di mostrare che $R_n(x,x_0) \to 0$ al tendere di n all'infinito, per ogni $x \in x \in (x_0-r, x_0+r) \cap [a,b]$. E infatti

$$|R_n(x,x_0)| \le \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n|f^{(n+1)}(tx+(1-t)x_0)|dt \le M(\frac{|x-x_0|}{r})^{n+1} \to 0$$

SERIE DI POTENZE

Dati $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, \quad x, x_0 \in \mathbf{R}$, la serie

$$(SP) \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n$$

si chiama serie di potenze in $x - x_0$. Nel seguito, sostituendo eventualmente $x - x_0$ con x, supporremo $x_0 = 0$.

Raggio di convergenza. Se la serie (SP) converge per $x = \overline{x}$, allora converge assolutamente per ogni x tale che $|x| < |\overline{x}|$. Posto allora

$$r := \sup\{|x| : \ (SP) \quad \text{converge in} \quad x\}$$

si ha che (SP) converge assolutamente per ogni $x \in (-r, r)$ e diverge assolutamente se $|x| > r$. Tale r si dirá raggio di convergenza di (SP).

Proposizione. Il raggio di convergenza r di (SP) é dato da

$$r \;=\; (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$$

ove si intende che $\frac{1}{0} = +\infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0$.

Segue da $\limsup_n (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} \;=\; |x| \, \limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}$ e dal criterio della radice.

Corollario. Se esiste $\lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ allora $r = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$.

Infatti $\quad |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \to r \quad \Rightarrow \quad |a_n|^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{r}$

ESEMPI.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n \, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 0$. Infatti $(n^n)^{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n} \, x^n$ ha raggio di convergenza $r = +\infty$. Infatti $(\frac{1}{n^n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \to 0$.
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^\alpha \, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 1$. Infatti $(n^\alpha)^{\frac{1}{n}} = (n^{\frac{1}{n}})^\alpha \to 1$
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \, x^n$ ha raggio di convergenza $r = \frac{1}{e}$. Infatti, dalla formula di Stirling, $$(\frac{n^n}{n!})^{\frac{1}{n}} = [\frac{n^n e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}(c + \circ(1))]^{\frac{1}{n}} \to e.$$

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

CONVERGENZA PUNTUALE. Siano $f_n,\ n \in \mathbf{N}$ funzioni definite su di un insieme E. Se, fissato comunque $x \in E$, esiste finito $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, diremo che la successione di funzioni f_n converge puntualmente (o semplicemente) in E alla funzione $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ \ x \in E$.

ESEMPI. Se $f_n(x) \equiv a_n, x \in E$, le f_n convergono se e solo se a_n converge e $\lim_n f_n(x) \equiv \lim a_n$. Se $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$, allora f_n converge alla funzione che vale zero in $[0,1)$ e vale 1 in $x = 1$.

In generale le proprietá delle f_n non si conservano nel limite puntuale. Nell'esempio $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$ le f_n sono continue, ma il loro limite non lo é.

CONVERGENZA UNIFORME. Se f_n converge puntualmente in E ad f, si dice che la convergenza é uniforme (in E) se

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to\infty} 0$$

ESEMPI.

1. La successione $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a zero in $[0,a]$ se $0 < a < 1$, ma la convergenza non é uniforme in $[0,1)$. Infatti

$$\sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n \to 0 \qquad \text{mentre} \qquad \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1.$$

2. (**Traslazioni**). Sia f una funzione (non identicamente nulla) nulla fuori di $(0,1)$. Siano $f_n(x) := f(x-n)$ le traslate di f. Allora $f_n(x) \to_{n\to\infty} 0,\ \ \forall x \in \mathbf{R}$, ma la convergenza non é uniforme, giacché $\sup_{\mathbf{R}} f_n = \sup_{\mathbf{R}} f$.

3. (**Cambi di scala**). Sia f una funzione (non identicamente nulla) nulla fuori di $(0,1)$. Siano $f_n(x) := f(nx)$. Allora $f_n(x) \to_{n\to\infty} 0,\ \ \forall x \in \mathbf{R}$, ma la convergenza non é uniforme, giacché $\sup_{\mathbf{R}} f_n = \sup_{\mathbf{R}} f$.

4. Fissato $p \in \mathbf{N}$, $f_n(x) := \frac{n \sin^p x}{x(1+n^2x^2)} \to_{n\to\infty} 0,\ \ \forall x > 0$ e la convergenza é uniforme in $[\delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 0$: $x \ge \delta \Rightarrow |f_n(x)| \le \frac{n}{\delta(1+n^2\delta^2} \to_n 0$.

Se $p \ge 3$, la convergenza é uniforme anche in $[0,\delta]$: $|f_n(x)| = |\frac{\sin x}{x}|^p \frac{(nx)^2 x^{p-3}}{n(1+n^2x^2)} \le \frac{1}{n}\delta^{p-3}$.

Invece, se $p < 3$, la convergenza in $[0,\delta]$ non é uniforme: $\sup_{0<x\le\delta} |f_n(x)| \ge f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}n^2 \sin^p \frac{1}{n} \to \frac{1}{2}$ se $p = 2$ e diverge se $p < 2$.

Il criterio di Cauchy.

f_n é uniformemente convergente in E se e solo f_n é " **Cauchy uniforme** ":

$$\forall\epsilon>0,\ \exists n_\epsilon:\ \ n,m\ge n_\epsilon\ \Rightarrow \sup_{x\in E}|f_n(x)-f_m(x)|\le\epsilon$$

Dimostrazione.

NECESSITÁ: $f_n\to f$ uniformemente in E $\Rightarrow$ $\exists n_\epsilon:$ $|f_n(x)-f_m(x)|\le |f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|\le\epsilon\ \ \forall x\in E$ se $n,m\ge n_\epsilon$.

SUFFICENZA: intanto, per ogni fissato x in E, la successione $n\to f_n(x)$ é di Cauchy, e quindi $f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ esiste finito per ogni x in E. Poi, dall'ipotesi, fissato $\epsilon>0$, $\exists n_\epsilon$ tale che

$$|f_n(x)-f(x)|\ \le\ |f_n(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-f(x)|\ \le\ \epsilon+|f_m(x)-f(x)|\ \ \forall x\in E$$

se $n,m\ge n_\epsilon$. Mandando m all'infinito in $|f_n(x)-f(x)|\le\epsilon+|f_m(x)-f(x)|\ \forall x\in E$ si ottiene $|f_n(x)-f(x)|\le\epsilon\ \ \forall x\in E$, cioé f_n converge uniformemente ad f.

Teorema 1. Sia f_n una successione di funzioni continue in un insieme E. Se f_n converge uniformemente ad f in E, allora f é continua in E.

Dimostrazione. Sia $x_0\in E$. Fissato $\epsilon>0$ siano $n_\epsilon,\ \delta_\epsilon>0$ tali che $|f_{n_\epsilon}(x)-f(x)|\le\epsilon,\ \ \forall x\in E,\ \ |f_{n_\epsilon}(x)-f_{n_\epsilon}(x_0)|\le\epsilon\ \ \forall x\in E, |x-x_0|\le\delta_\epsilon$. Allora $|f(x)-f(x_0)|\le 2\epsilon,\ \forall x\in E, |x-x_0|\le\delta_\epsilon$.

NOTA. Se la convergenza non é uniforme il limite puó non essere continuo. Controesempio: $f_n(x)=x^n,\ \ x\in[0,1]$.

Teorema 2. Sia f_n una successione di funzioni integrabili in un intervallo limitato $[a,b]$. Se f_n converge uniformemente ad f in $[a,b]$, allora f é integrabile in $[a,b]$ e

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\ =\ \int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n$$

Dimostrazione. Siccome $|s^+-t^+|\le|s-t|,\ \ |s^--t^-|\le|s-t|,\ \ \forall s,t\in\mathbf{R}$, f_n^+,f_n^- convergono uniformemente ad f^+,f^- in $[a,b]$. Possiamo quindi limitarci a considerare $f_n,f\ge 0$ (e nulle fuori di $[a,b]$).

Fissato $\epsilon>0$, siano $n_\epsilon,\ \ I_j$ tali che

$$|f_{n_\epsilon}(x)-f(x)|\le\epsilon,\ \ \forall x\in[a,b],\qquad\qquad 0\le S(f_{n_\epsilon};I_j)-s(f_{n_\epsilon};I_j)\le\epsilon$$

(possiamo supporre ogni I_j contenuto in $[a,b]$ oppure disgiunto da $[a,b]$). Allora

$$S(f;I_j)-s(f;I_j)\le 2\epsilon\sum_{\{j:I_j\subset[a,b]\}} l(I_j)+S(f_{n_\epsilon};I_j)-s(f_{n_\epsilon};I_j)\le 2\epsilon(b-a)+\epsilon$$

Infine, $\quad |\int\limits_a^b f_n - \int\limits_a^b f| \le \int\limits_a^b |f_n-f| \le (b-a)\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| \to_{n\to\infty} 0$

NOTA. Se la convergenza delle f_n non é uniforme, il limite puó non essere integrabile: se $\mathbf{Q}=\{q_1,\dots,q_n,\dots\}$ e $f_n=\chi_{\{q_1,\dots,q_n\}}$, f_n é integrabile in $[0,1]$, ma $\chi_{\mathbf{Q}}(x)=\lim_n f_n(x)$ non lo é.

Se la convergenza delle f_n non é uniforme, puó accadere che $f(x)=\lim_n f_n(x)$ sia integrabile ma $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\ne\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n$. Ad esempio, $f_n(x)=nf(nx)$, $x\in[0,1]$ ove $f(x)=\frac{x}{1+x^4}$ converge puntualmente a zero mentre $\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^n f\to\int_0^\infty\frac{xdx}{1+x^4}$.

Il Teorema 1 non si estende ad intervalli illimitati. Ad esempio, $f_n(x)=\frac{1}{x}\chi[1,n]$ sono integrabili e convergono alla funzione $f(x)=\frac{1}{x}\chi[1,+\infty)$ che non é integrabile.
Ancora di piú, se f é limitata ed integrabile su $\mathbf{R}$ con $\int_{\mathbf{R}}f\ne 0$, $f_n(x)=\frac{1}{n}f(\frac{x}{n})$ converge uniformemente a zero (il limite é quindi integrabile con integrale zero), ma $\int_{\mathbf{R}}f_n=\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{n}f(\frac{x}{n})dx=\int_{\mathbf{R}}f\ne 0$.

Teorema 3. Siano $f_n\in C^1(I)$, I intervallo aperto. Se $f_n(x_0)$ converge per un $x_0\in I$ e f'_n converge uniformemente ad una funzione g in I, allora f_n converge in I ad una $f\in C^1(I)$ con $f'=g$.

Dimostrazione. Usando le ipotesi, il TFC ed il Teorema 2, vediamo che:

$$f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^x f'_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)+\int_{x_0}^x g(t)dt$$

NOTA. La convergenza uniforme delle f'_n é essenziale.

Un esempio: $f_n(x):=|x|^{1+\frac{1}{n}}$, $x\in(-1,1)$. Si ha $f'_n(x)=(1+\frac{1}{n})\frac{x}{|x|}|x|^{\frac{1}{n}}\to_{n\to\infty}\frac{x}{|x|}$, per $x\ne 0$ e $f'_n(0)\to_n 0$ (la convergenza non é uniforme!) e $f_n(x)\to|x|$, $\forall\, x\in(-1,1)$, che non é derivabile in $x=0$.

Un altro esempio: $f_n(x):=\int\limits_0^x\arctan nt\,dt=\frac{1}{n}\int\limits_0^{nx}\arctan\tau\,d\tau$. Si ha $f'_n(x)=\arctan nx\to\frac{x}{|x|}\frac{\pi}{2}$ se $x\ne 0$ e $f'_n(0)=0$, $\forall n$. Poi, usando la regola di de l'Hopital, $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^{tx}\arctan\tau d\tau=\lim_{t\to+\infty}x\arctan tx=\frac{\pi}{2}|x|$, e quindi $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^{nx}\arctan\tau d\tau=\frac{\pi}{2}|x|$ che non é derivabile in $x=0$.

Esempi e problemi.

1. Studiare il comportamento della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{n}{2}} \frac{1}{n!!} x^n.$

Ricordiamo che $2n!! = 2\,4 \ldots 2n$, $(2n-1)!! = 1\,3 \ldots (2n-1)$. Al fine di calcolare $\lim_n |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{\sqrt{n}}{(n!!)^{\frac{1}{n}}}$ (e quindi il raggio di convergenza), determiniamo dapprima, usando le formule di Wallis e di Stirling, il comportamento asintotico di $n!!$

Dalla formula di Wallis , $\frac{\pi}{2} = [\frac{2n!!}{2n-1!!}]^2 \frac{1}{2n+1} + O(\frac{1}{n})$, otteniamo

$$[\frac{2n!}{(2n-1!!)^2}]^2 \frac{1}{2n+1}\, O(\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2} = [\frac{(2n!!)^2}{2n!}]^2 \frac{1}{2n+1} + O(\frac{1}{n}) \qquad \text{e quindi}$$

$$2n-1!! = \left[\frac{2\,(2n!)^2}{\pi\,(2n+1)}\right]^{\frac{1}{4}} (1+O(\frac{1}{n})), \qquad 2n!! = \left[\frac{\pi}{2}(2n!)^2(2n+1)\right]^{\frac{1}{4}} (1+O(\frac{1}{n}))$$

Da qui, usando la formula di Stirling, $n! = [n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}](c+O(\frac{1}{n}))$, otteniamo

$$(a_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \left[\frac{(2n)^n}{2n!!}\right]^{\frac{1}{2n}} = \frac{\sqrt{2n}}{\left[\frac{\pi(2n+1)}{2}(2n!)^2\right]^{\frac{1}{8n}}}(1+O(\frac{1}{n^2})) =$$

$$= \frac{\sqrt{2n}}{[\frac{\pi(2n+1)}{2}(2n)^{4n+1}e^{-4n}]^{\frac{1}{8n}}}(1+O(\frac{1}{n^2})) = \frac{\sqrt{e}}{[\pi n(2n+1)]^{\frac{1}{8n}}}(1+O(\frac{1}{n^2})) = \sqrt{e}+O(\frac{\log n}{n})$$

$$(a_{2n-1})^{\frac{1}{2n-1}} = \left[\frac{(2n-1)^{\frac{2n-1}{2}}}{(2n-1)!!}\right]^{\frac{1}{2n-1}} = \frac{\sqrt{2n-1}}{\left[\frac{2}{\pi(2n+1)}(2n!)^2\right]^{\frac{1}{8n}}}(1+O(\frac{1}{n^2})) =$$

$$= \frac{\sqrt{2n-1}}{[\frac{2}{\pi(2n+1)}(2n)^{4n+1}e^{-4n}]^{\frac{1}{8n}}}(1+O(\frac{1}{n^2})) = \sqrt{\frac{(2n-1)\,e}{[\frac{4n}{\pi(2n+1)}]^{\frac{1}{4n}}}}(1+O(\frac{1}{n^2})) = \sqrt{e}+O(\frac{\log n}{n})$$

Dunque il raggio di convergenza é $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Comportamento per $|x| = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Calcoli simili ai precedenti danno:

$$\frac{(2n)^n}{2n!!\, e^n} = \frac{1}{[\pi n(2n+1)]^{\frac{1}{4}}}\,(1+O(\frac{1}{n})): \quad \text{va a zero come} \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}\sqrt{n}}$$

$$\frac{(2n-1)^{\frac{2n-1}{2}}}{e^{n-\frac{1}{2}}(2n-1)!!} = \left[\frac{2n-1}{e}\right]^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{\pi(2n+1)\,e^{4n}}{2\,(2n)^{4n+1}}\right]^{\frac{1}{4}} (1+O(\frac{1}{n})) =$$

$= \sqrt{e}\,(1-\frac{1}{2n})^n \left[\frac{\pi(2n+1)}{4n(2n-1)^2}\right]^{\frac14} (1+O(\frac1n))$ che ugualmente va a zero come $(\frac{\pi}{8})^{\frac14}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Dunque la serie diverge in $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Studiamo ora il comportamento in $x=-\frac{1}{\sqrt{e}}$. Posto $b_n := a_n\, e^{-\frac{n}{2}}$, la serie si riscrive come $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$. Dai calcoli precedenti si trova facilmente che

$$\frac{b_{2n-1}}{b_{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \circ(1), \qquad \frac{b_{2n}}{b_{2n+1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \circ(1)$$

e quindi $b_{2n-1} > b_{2n}$ e $b_{2n} < b_{2n+1}$. In particolare il criterio di Leibnitz non si applica. Ed infatti, dalle stime precedenti si vede anche che

$$\sum_1^N b_{2n} = O(1) + (\frac{1}{\pi})^{\frac14} \sum_1^N \left[\frac{1}{n(2n+1)}\right]^{\frac14} = O(1) + (\frac{1}{\pi})^{\frac14} \int_1^{N+1} f$$

ove $f(x) := \left[\frac{1}{x(2x+1)}\right]^{\frac14}$ é funzione decrescente in $[1,+\infty)$. Analogamente, posto $g(x) := \left[\frac{2x+1}{4x(2x-1)^2}\right]^{\frac14}$, risulta

$$\sum_1^N b_{2n-1} = O(1) + \pi^{\frac14} \sum_1^N \left[\frac{2n+1}{4n(2n-1)^2}\right]^{\frac14} = O(1) + \pi^{\frac14} \int_1^{N+1} g$$

ed allora, usando la regola di de l'Hopital

$$\lim_N \frac{\sum_1^N b_{2n}}{\sum_1^N b_{2n-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\frac{1}{\pi})^{\frac14}\int_1^x f}{\pi^{\frac14}\int_1^x g} = (\frac{1}{\pi^2})^{\frac14} \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = (\frac{4}{\pi^2})^{\frac14} < 1$$

e quindi $\sum_1^N b_{2n} - \sum_1^N b_{2n-1} \to_{N\to+\infty} -\infty$ e quindi la serie non converge in $-\frac{1}{\sqrt{e}}$.

2 Sia $r \geq 0$. Studiare la convergenza di $f_n(x) := \frac{n\,x^r}{1+n^2x^2}$, $x \geq 0$.

Chiaramente , $\forall x \geq 0, f_n(x) \to_{n\to\infty} 0$. Discutiamo quindi di (eventuale) convergenza uniforme a zero.

Sia $r > 2$. Da $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \;\; \forall n$, segue che la convergenza non é uniforme in $[0,+\infty)$. D'altra parte,

$$r > 2 \;\Rightarrow\; f_n'(x) := \frac{x^{r-1}[r-n^2x^2(2-r)]}{(1+n^2x^2)^2} > 0 \quad \forall x > 0 \quad \Rightarrow$$

$\sup_{x\le M}|f_n(x)| = f_n(M) \to_{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n$ converge uniformemente in $[0,M]$, $\forall M>0$.

Se $r=2$, le f_n sono ancora crescenti, ma $\sup_{x\ge 0}|f_n(x)| = \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{n}$. Dunque f_n va a zero uniformemente in $[0,+\infty)$. In effetti in tal caso $f_n(x) = \frac{1}{n} f(nx)$, $\quad f(x) := \frac{x^2}{1+x^2}$.

Sia $r<2$. In tal caso f_n' ha un unico zero, che é punto di massimo per f_n, dato da $x_n = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{r}{2-r}} \to_{n\to\infty} 0$. Ed allora $\sup_{x\ge\delta} f_n(x) = f_n(\delta) \to_n 0$ e cioé la convergenza é uniforme in $[\delta,+\infty)$, comunque piccolo sia preso δ. Di piú, $\sup_{x\ge\delta} f_n(x) = f_n(x_n) = \frac{2-r}{2\,n^{r-1}}(\frac{r}{2-r})^{\frac{r}{2}} \to_n 0$ se $r>1$:

$1<r\le 2 \;\Rightarrow\; f_n$ converge uniformemente a zero in $[0,+\infty)$.

Sia infine $0\le r\le 1$. In tal caso $f_n(x_n)$ non tende a zero (infatti va all'infinito se $r<1$), e quindi la convergenza non é uniforme in $[0,\delta]$ quale che sia $\delta>0$.

3 Sotto quali ipotesi $\quad \lim_n \int_a^\infty f_n = \int_a^\infty \lim_n f_n \quad$?

Esempio. $\quad f$ limitata in $[0,+\infty) \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-nx}dx \to_{n\to\infty} 0$. Infatti $|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx| \le \sup|f| \int_0^{+\infty} e^{-nx}dx = \frac{\sup|f|}{n}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$. Notiamo che $f(x)e^{-nx} \to_n 0$, $\forall x>0$ e che la convergenza é infatti uniforme in $[\delta,+\infty)$, $\forall\delta>0$, ma non in $[0,\delta]$.

L'uniforme convergenza non basta. Ma

Proposizione. Se

(i) $\quad f_n \to_n f$ uniformemente su $\quad [a+\delta, M]$, $\ \forall\ \delta>0, M>a$

(ii) $\quad \exists g$ tale che $|f_n(x)| \le g(x)\ \ \forall n,\ x \quad$ con $\quad \int_a^\infty g < +\infty$

allora $$\lim_n \int_a^\infty f_n = \int_a^\infty \lim_n f_n$$

Infatti:

$$\forall\ \delta>0,\ M>a+\delta, \quad \limsup_n \Big|\int_a^\infty f_n - f\Big| \le$$

$$\limsup_n \left[\int_a^{a+\delta} |f_n-f| + \int_M^\infty |f_n-f|\right] \le 2\int_a^{a+\delta} g + 2\int_M^\infty g \le \epsilon \quad \text{se} \quad M\ge M(\epsilon),\ \delta<\delta_\epsilon$$

L'ipotesi $|f_n(x)| \leq g(x)$ (infatti basta che esistano x_0, n_0 tali che $|f_n(x)| \leq g(x)\ \forall x \geq x_0, \forall n \geq n_0$) viene chiamata ipotesi di **equidominatezza**).

Ad esempio, $\lim_n t_n = t > 0 \;\Rightarrow\; \lim_n \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-t_n x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}$

C'é equidominatezza: $|\frac{\sin x}{x}\, e^{-t_n x}| \leq e^{-\frac{tx}{2}}$, $\forall x \geq 0$, se n é tale che $t_n \geq \frac{t}{2}$.

La convergenza é uniforme in $[0, M]$: $|\frac{\sin x}{x}[e^{-t_n x} - e^{-tx}]| \leq e^{-tx}|e^{(t-t_n)x} - 1| \leq \epsilon$ se $|t - t_n|M \leq \delta_e$ (infatti la convergenza é uniforme su tutto $[0, +\infty)$, perché $e^{-t_n x} \leq \epsilon$ uniformemente in n se $x \geq M_\epsilon$).

NOTA Abbiamo in effetti provato che la funzione $t \to \int_0^\infty e^{-t_n x} \frac{\sin x}{x}\, dx$ é continua in ogni $t > 0$. É anche continua in $t = 0$? Ci chiediamo cioé se é vero che

$$t_n \to 0^+ \;\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-t_n x}\, dx \to \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Prendiamo per semplicitá $t_n = \frac{1}{n}$. Notiamo che $\frac{\sin x}{x} e^{-\frac{x}{n}} \to_n \frac{\sin x}{x}$ uniformemente sui limitati, ma non cé equidominatezza perché $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}| dx = +\infty$. Proviamo che ugualmente é lecito il passaggio al limite sotto segno di integrale. Scriviamo $f(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ per cui $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$. Allora , integrando prima per parti e quindi cambiando variabile, otteniamo

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{n}}\, dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty f(x)\, e^{-\frac{x}{n}}\, dx = \int_0^\infty f(nt)\, e^{-t}\, dt$$

Ora, $\lim_n f(nt) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ ed infatti la convergenza é uniforme su $[\delta, +\infty)$, $\forall \delta > 0$ perché $\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt \to_{x\to+\infty} 0$. Inoltre, c'é equidominatezza:

$$|f(nx)e^{-x}| \leq \sup_{t\geq 0} |f(t)| e^{-t} \quad \text{e} \quad \sup_{t\geq 0} |f(t)| < +\infty$$

perché f é continua e $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ esiste finito. Concludiamo che

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{n}}\, dx \;=\; \int_0^\infty f(nt)\, e^{-t}\, dt \to_{n\to\infty} \int_0^\infty \lim_n f(nt) e^{-t} dt \;=\; \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$