AM2: Tracce delle lezioni-III settimana

Calcolo dell'integrale di Gauss (mediante la formula di Wallis):

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Cominciamo con la diseguaglianza elementare

$$(*) \qquad 1-x \;\le\; e^{-x} \;\le\; \frac{1}{1+x}\,, \quad \forall x \ge 0$$

La diseguaglianza di sinistra, valida per $x=0$, segue da $\frac{d}{dx}[e^{-x}-(1-x)] = -e^{-x}+1 \ge 0, \quad \forall x \ge 0$. La diseguaglianza di destra, equivalente a $x - \log(1+x) \ge 0$, segue da

$$\tfrac{d}{dx}[x-\log(1+x)] = 1 - \tfrac{1}{1+x} \ge 0, \quad \forall x \ge 0.$$

Sostituendo x con x^2 in $(*)$, elevando alla n ed integrando, si ottiene

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \;\le\; \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx \;\le\; \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Effettuando il cambio di variabile $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$ in $\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx$, otteniamo

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x)^n dx \;\le\; \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \;\le\; \sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Ricordiamo che $\quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{2n-1}} \;+\; \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Inoltre, effettuando il cambio di variabile $x = \cos t$, otteniamo

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\; dt \;=\; \frac{2\;\ldots\;2n}{3\;\ldots\;(2n+1)} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \;+\; \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

ove l'ultima uguaglianza segue dalla formula di Wallis. Riassumendo:

$$\sqrt{\frac{n\pi}{2(2n+1)}} \;+\; \circ(1) \;\le\; \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \;\le\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n\pi}{2n+1}} \;+\; \circ(1)$$

Passando al limite per n tendente all'infinito si ottiene $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

INTEGRALI E SERIE

Dalla additivitá dell'integrale: $\int\limits_1^{+\infty} |f| = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_1^{n+1} |f| = \lim_{n\to+\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_j^{j+1} |f|$.

Ovvero, f é integrabile su $[1,+\infty)$ se e solo se la serie $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \int\limits_j^{j+1} |f|$ converge, e in tal caso

$$\int_1^{+\infty} |f| = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} |f|$$

Analogamente, f é integrabile in senso generalizzato su $[1,+\infty)$ se e solo se la serie $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \int\limits_j^{j+1} f$ converge, e in tal caso

$$\int_1^{+\infty} f = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} f$$

Il caso di funzioni non negative e decrescenti

Se $f \geq 0$ é non crescente in $[1,+\infty)$, allora $f(j+1) \leq \int\limits_j^{j+1} f \leq f(j), \quad \forall j \in \mathbf{N}$ e quindi

$$\sum_j f(j) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} f < +\infty$$

ESEMPI

1. Sia $f(x) = \frac{1}{x^r}$. Siccome $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx < +\infty$ se e solo se $r > 1$ la serie (armonica generalizzata) $\sum_n \frac{1}{n^r}$ converge se e solo se $r > 1$.

2. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^r} < +\infty$ se e solo se $r > 1$, e quindi la serie $\sum_n \frac{1}{n(\log n)^r}$ converge se e solo se $r > 1$.

La diseguaglianza $f(j+1) \leq \int\limits_j^{j+1} f \leq f(j), \quad \forall j \in \mathbf{N}$ puó essere utilizzata per:

I) stimare la rapiditá con cui diverge la somma parziale di una serie divergente

II) stimare la rapiditá con cui converge a zero il resto n-esimo di una serie convergente.

I) $\quad f(1)+\ldots+f(n)=\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \;+\; \sum\limits_{1}^{+\infty} (f(n)-\int\limits_{n}^{n+1} f\;) \;+\; \circ(1).$

ove la serie (a termini positivi) $\sum\limits_{1}^{+\infty} (f(n)-\int\limits_{n}^{n+1} f\;)$ converge perché $\sum\limits_{1}^{+\infty} (f(n)-\int\limits_{n}^{n+1} f\;) \;\leq\; \sum\limits_{1}^{+\infty} (f(n)-f(n-1)) = f(1)-f(\infty) \;<\; +\infty$. La formula segue poi da $f(1)+\ldots+f(n)=\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \;+\; \sum\limits_{j=1}^{n} (f(j)-\int\limits_{j}^{j+1} f\;)$.

ESEMPI

1. $\quad 1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n} \;=\; \log(n+1) \;+\gamma \;+\; \circ(1)$

$(\gamma \;:=\; \sum\limits_{1}^{+\infty}(\frac{1}{n} \;-\; \log\frac{n+1}{n}) \;<\; +\infty$ si chiama costante di Eulero-Mascheroni)

2. $\quad \exists c>0: \;\; \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{n\log n} \;=\; \log[\log(n+1)] \;+\; c \;+\; \circ(1).$

3. $\quad n! \;=\; \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n}}\,(b+\circ(1))$

$(\log b \;:=\; 1+\frac{1}{2}\gamma-\sum\limits_{1}^{+\infty} n\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-t)^2}{(n+t)^3}$. Si puó provare che $b=\sqrt{2\pi}$: formula di Stirling)

1. Sia $f(x)=\frac{1}{x}$, cosicché $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \;=\; f(1)+\ldots+f(n) \;=\; \int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}+\gamma+\circ(1) \;=\; \log(n+1)+r+\circ(1)$.

2. Analogo ad 1., con $f(x)=\frac{1}{x\log x}$.

3. $\quad \log n! = \log 2+\ldots+\log n \;=$

$$(\log 2-\int\limits_{1}^{2}\log t dt)+\ldots+(\log n-\int\limits_{n-1}^{n}\log t dt)+\int\limits_{1}^{n}\log t dt = f(1)+\ldots+f(n-1)+n\log n-n+1$$

ove $f(x) \;:=\; \log(x+1)-\int_{x}^{x+1}\log t dt \;=\; 1-x\log(1+\frac{1}{x})>0, \forall x>0$ é decrescente (a zero). Proviamo che

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2x} \;-\; \alpha(x), \;\; \alpha(x) \;:=\; x\int_{0}^{1}\frac{(1-t)^2}{(x+t)^3}\,dt$$

Infatti, posto per $s\in(0,1)$, $\;\varphi(t) \;=\; \log(st+1), t\in[0,1]$ la formula di Taylor di ordine due per φ dá

$$\log(1+s) \;=\; \varphi(1) \;=\; s-\frac{s^2}{2}+\; s^3\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-t)^2}{(1+st)^3}\,dt$$

Posto in tale formula $s = \frac{1}{x}$, si ottiene l'espressione voluta per $f(x)$. Ovviamente, $\alpha(x) = \frac{1}{2x} - f(x)$ é continua ed é anche integrabile in $[1, +\infty)$ perché $\alpha(x) \leq \frac{1}{x^2}$ e quindi

$$\int_1^n f = \frac{1}{2}\log n - \int_1^{+\infty} \alpha(x)dx + \circ(1)$$

e quindi

$$f(1) + \ldots + f(n-1) = \frac{1}{2}\log n - \int_1^{+\infty} \alpha(x)dx + r + \circ(1)$$

ove $r = \sum_1^{+\infty} [f(n) - \int_n^{n+1} f] = \sum_1^{+\infty} \left[(\frac{1}{2n} - \alpha(n)) - \int_n^{n+1} (\frac{1}{2x} - \alpha(x))dx \right]$ e quindi

$$r = \frac{1}{2}\gamma - \sum_1^{+\infty} \alpha(n) + \int_1^{+\infty} \alpha(x)dx$$

Quindi

$$\log n! = (n + \frac{1}{2})\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\gamma - \sum_1^{+\infty} \alpha(n) + \circ(1)$$

$$n! = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(b + \circ(1))$$

$$\log b := 1 + \frac{1}{2}\gamma - \sum_1^{+\infty} n \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(n+t)^3}$$

II) Sia f integrabile. Da $f(j+1) \leq \int_j^{j+1} f \leq f(j), \quad \forall j \in \mathbf{N}$ segue $0 \leq [\sum_{j \geq n} f(j)] - \int_n^{+\infty} f \leq f(n)$. Se accade che $f(n) = \circ(\int_n^{+\infty} f)$ per n tendente all'infinito, allora

$$\sum_{j \geq n} f(j) = \int_n^{+\infty} f + \circ(\int_n^{+\infty} f)$$

ESEMPIO. Sia $r > 1$. Allora $\sum_{j \geq n} \frac{1}{j^r} = \frac{1}{(r-1)n^{r-1}} + \circ(\frac{1}{n^{r-1}})$.

INTEGRALI DI FUNZIONI NON LIMITATE
INTEGRALI IMPROPRI

Nel seguito, considereremo funzioni integrabili su $[a, b-\delta]$ $(a < b)$ od anche su $(-\infty, b-\delta]$ $\forall\delta > 0$ piccolo (analogamente su $[a+\delta, b], [a+\delta, +\infty))$. Ad esempio, se $-\infty < a < b < +\infty$, funzioni continue in $[a, b)$ (risp. $(a, b]$. Dal Teorema di Riemann segue subito che una funzione siffatta é certamente integrabile se é anche limitata.

PROBLEMA. Dare condizioni di esistenza e metodi di calcolo per integrali del tipo $\int_a^b f$ (f in generale non limitata)

Le funzioni che considereremo si assumeranno, senza perdita di generalitá, nulle fuori di $[a, b]$ ed f integrabile significherá integrabile in $[a, b]$.

Teorema 1. Sia f integrabile su $[a, b-\delta]$, $\forall\delta > 0$ piccolo. Allora

(i) f integrabile $\Leftrightarrow \lim_{x\to b^-} \int_a^x |f| < +\infty$.

(ii) f integrabile $\Rightarrow \lim_{x\to b^-} \int_a^x f = \int_a^b f$.

Dimostrazione.

(i) Necessitá: da $|f| \geq 0$ e dalla additivtá dell'integrale segue che $\int_a^x f^+$ e $\int_a^x f^-$ sono non decrescenti e superiormente limitate da $\int |f|$ e quindi esistono (finiti) $\lim_{x\to b^-} \int_a^x |f|$, $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$. Sufficenza: stesso argomento del caso di un intervallo illimitato.

(ii) L'esistenza di $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ é giá stata osservata in (i). Che $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f = \int_a^b f$, segue dal

Lemma 1. Sia f integrabile, $I_\delta := [b-\delta, b]$. Allora

$$\forall x, \quad \int_{I_\delta(b)} |f| \to_{\delta\to 0} 0$$

Dimostrazione in Appendice.

NOTA. Il fatto che $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ esista finito é condizione necessaria ma non sufficente perché f risulti integrabile.

NOTAZIONE $\quad \int_a^b |f| := \lim_{x\to b^-} \int_a^x |f|$

sia che il limite a secondo membro sia finito od infinito. Con tale notazione, il Teorema 1-(i) si riscrive

$$f \text{ integrabile in } [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b |f| < +\infty$$

ESEMPI .

a) se $\alpha < 1$, $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^x = \frac{1}{1-\alpha}$

b) se $\alpha > 1$, $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^x = +\infty$

c) $\int_0^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0^+} \log t\big|_x^1 = +\infty$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi.$ Infatti

$$\int_\delta^R \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{\delta}}^{\sqrt{R}} \frac{2dt}{(1+t^2)} = \arctan\sqrt{\delta} - \arctan\sqrt{R} \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} := \lim_{\delta\to 0}(\lim_{R\to+\infty} \int_\delta^R \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}) = \pi.$$

NOTA Tale integrale permette di riottenere l'integrale di Gauss da $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ e (vedi Appendice) $(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt)^2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

La proprietá $\lim_{x\to b^-} \int_a^x |f| < +\infty$, si riscrive (condizione di Cauchy)

Proposizione 2.

(i) $\int_a^b |f| < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0, \exists\delta_\epsilon : \ b-\delta \le x_1 < x_2 < b \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} |f| \le \epsilon$

(ii) $\int_a^b f$ esiste $\quad \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0, \exists\delta_\epsilon : \ b-\delta \le x_1 < x_2 < b \Rightarrow |\int_{x_1}^{x_2} f| \le \epsilon$

(iii) $\int_a^b |f| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ esiste finito

Dimostrazione.

(i) É la condizione di Cauchy perché esista finito il limite, per x tendente a b da sinistra, di $F(x) := \int_a^x |f|$ giaccé $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} |f|$.
(ii) Come in (i), (iii) segue da $|\int_{x_1}^{x_2} f| \le \int_{x_1}^{x_2} |f|$.

Teorema del Confronto.

(i) $\exists\delta > 0:\ |f(x)| \le g(x)\ \ \forall x \in [b-\delta, b),\ \int_a^b g\ <\ +\infty\ \ \Rightarrow\ \ \int_a^b |f|\ <\ +\infty$
(ii) $\exists\delta > 0:\ f(x) \ge g(x) \ge 0\ \ \forall x \in [b-\delta, b),\ \int_a^b g\ =\ +\infty\ \ \Rightarrow\ \ \int_a^b |f|\ =\ +\infty$

Corollario A. Sia f integrabile in $[a, x]$, $\forall x < b$.

(i) $\exists M, \delta > 0,\ \alpha < 1:\ |f(x)| \le \frac{M}{|x-b|^\alpha}\ \ \forall\, x \in [b-\delta, b)\ \Rightarrow\ f$ é integrabile in $[a, b]$

(ii) $\exists M, \delta > 0,\ :\ |f(x)| \ge \frac{M}{|x-b|}\ \ \forall\, x \in [b-\delta, b)\ \Rightarrow\ \int_a^b |f|\ =\ +\infty$

Corollario B: integrabilitá e comportamento asintotico.

(i) $\exists\alpha < 1:\ |x-b|^\alpha |f(x)| \to_{x\to+\infty} c\ <\ +\infty\ \Rightarrow\ f$ integrabile

(ii) $:\ |(x-b)\, f(x)| \to_{x\to+\infty} c\ >\ 0\ \Rightarrow\ \int_a^{+\infty} |f|\ =\ +\infty$

Inegrabilitá in senso generalizzato, integrali impropri.

Senza ipotesi di integrabilitá su f, $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ non esisterá in generale.

Definizione (di Integrale Improprio).

f, integrabile in $[a, b-\delta]$ per ogni δ piccolo, si dice integrabile in senso improprio (o in senso generalizzato) in $[a, b]$ se

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x f \quad \text{esiste finito}$$

e diremo (con abuso di linguaggio: f potrebbe non essere integrabile in $[a, b]$!) che

$$\int_a^b f\ :=\ \lim_{x\to b^-} \int_a^x f$$

é l'integrale improprio (o in senso generalizzato) di f su $[a, b]$.

Dal Teorema 1 segue:
se $f \ge 0$, (f é integrabile in $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ (f é integrabile in senso generalizzato (in $[a, b]$)

se f cambia segno, (f é integrabile) $\Rightarrow$ (f é integrabile in senso improprio), ma non viceversa.

APPENDICE

Dimostrazione Lemma. É certamente vero se esiste $\delta > 0$ tale che $\sup_{I_\delta(x)} f < +\infty$. Supporremo quindi che $\sup_{I_\delta(x)} f = +\infty \quad \forall \delta > 0$.

Sia $\infty > S(f; I_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} (\sup_{I_j} f) l(I_j)$. Ció comporta che, per ogni j, $\sup I_j < x$ oppure $\inf I_j > x$ ed anche che, fissato $\epsilon > 0$ esiste j_ϵ tale che $\sum_{j > j_\epsilon} \sup_{I_j} f \, l(I_j) \leq \epsilon$. Ma allora per δ abbastanza piccolo, $I_\delta(x) \cap I_j = \emptyset$ per $j = 1, \ldots, j_\epsilon$ e quindi $S(f \chi_{I_\delta(x)}; I_j) = \sum_{j > j_\epsilon} \sup_{I_j} f \, l(I_j) \leq \epsilon$.

Dimostrazione della formula $\quad (\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt)^2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Effettuando il cambio di variabile $t = \theta\tau$ per un $\theta > 0$ fissato, otteniamo $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\theta} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\theta\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau$ e quindi $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\theta\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. Quindi la funzione $\tau \to \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}} \, d\theta = e^{-\tau} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\theta\tau}}{\sqrt{\theta}} \, d\theta = \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, dt$ é continua e integrabile in $(0, +\infty)$ e

$$A := \int_0^{+\infty} (\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}} d\theta) d\tau = (\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt)^2$$

Considerazioni analoghe per $\theta \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}} \, d\tau = \frac{1}{\sqrt{\theta}(1+\theta)}$ e

$$B := \int_0^{+\infty} (\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}} d\tau) d\theta = \int_0^{+\infty} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}(1+\theta)}$$

Si tratta quindi di provare che $A = B$. Tale uguaglianza segue da un fatto generale (teorema di Fubini), che andiamo a verificare in questo caso particolare.

Supponiamo (lo proveremo dopo) che $\forall \, \epsilon > 0, \;\; \exists \delta_\epsilon, M_\epsilon$ tali che

$$(*) \qquad A(\delta, M) := A - \int_\delta^M (\int_\delta^M \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}} d\theta) d\tau \leq \epsilon$$

$$(**) \qquad B(\delta, M) := B - \int_\delta^M (\int_\delta^M \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}} d\tau) d\theta \leq \epsilon$$

$\forall \delta \leq \delta_\epsilon$, $M \geq M_\epsilon$. Ora, suddiviso l'intervallo $[\delta, M]$ in n intervalli uguali e disgiunti I_i, possiamo scrivere, usando l'additivitá ed il teorema della media

$$\int_\delta^M (\int_\delta^M \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}} d\tau) d\theta = \sum_i \int_{I_i} (\int_\delta^M \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}} d\tau) d\theta =$$

$$\sum_i \frac{M-\delta}{n}\int_\delta^M \frac{e^{-(1+\theta_i')\tau}}{\sqrt{\theta_i'}}d\tau \;=\; (\frac{M-\delta}{n})^2\sum_{ij}\frac{e^{-(1+\theta_i')\tau_j'}}{\sqrt{\theta_i'}}$$

per opportuni $\theta_i' \in I_i,\ \tau_j' \in I_j$. Analogamente si trova

$$\int_\delta^M (\int_\delta^M \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}}d\theta)d\tau \;=\; (\frac{M-\delta}{n})^2\sum_{ij}\frac{e^{-(1+\theta_i'')\tau_j''}}{\sqrt{\theta_i''}}$$

per certi $\theta_i'' \in I_i,\ \tau_j'' \in I_j$. Ed allora

$$|\int_\delta^M (\int_\delta^M \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}}d\tau)d\theta \;-\; \int_\delta^M (\int_\delta^M \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}}d\theta)d\tau| \;=$$

$$(\frac{M-\delta}{n})^2|\sum_{ij}\frac{e^{-(1+\theta_i')\tau_j'}}{\sqrt{\theta'}} - \frac{e^{-(1+\theta_i'')\tau_j''}}{\sqrt{\theta''}}| \;\leq\leq\; (M-\delta)^2 \sup_{ij}|\frac{e^{-(1+\theta_i')\tau_j'}}{\sqrt{\theta'}} - \frac{e^{-(1+\theta_i'')\tau_j''}}{\sqrt{\theta''}}| \;\leq \epsilon$$

se n é scelto opportunamente grande, in virtú della uniforme continuitá di $\frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}}$. Ció prova che $A = B$ in virtú di $(*), (**)$.

Proviamo infine $(*), (**)$. Si ha

$A(\delta, M) \;=\; \int_{[0,\delta]\cup[M,+\infty)} (\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}}\, d\theta)\, d\tau \;+\; \int_\delta^M (\int_{[0,\delta]\cup[M,+\infty)} \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}}\, d\theta)\, d\tau$

e $\int\limits_0^{+\infty}(\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}}\, d\theta)d\tau \;<\; +\infty \;\;\Rightarrow\;\; \int_{[0,\delta]\cup[M,+\infty)} (\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}}\, d\theta)\, d\tau \;\leq\; \epsilon$ se $\delta \leq \delta_\epsilon, M \geq M_\epsilon$. Poi,

$\int_\delta^M (\int_{[0,\delta]} \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}}\, d\theta)\, d\tau \;=\; \int_\delta^M (e^{-\tau}\int_0^\delta \frac{e^{-\theta\tau}}{\sqrt{\theta}}d\theta)d\tau \;\leq\; \int_\delta^M e^{-\tau}d\tau \int_0^\delta \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} \;\leq\; \frac{\sqrt{\delta}}{2}$

mentre $\int\limits_\delta^M (e^{-\tau}\int\limits_M^{+\infty} \frac{e^{-\theta\tau}}{\sqrt{\theta}}d\theta)d\tau \;\leq\; \frac{1}{\sqrt{M}}\int\limits_\delta^M (e^{-\tau}\int_M^{+\infty} e^{-\theta\tau}d\theta)d\tau \;=$
$\frac{1}{\sqrt{M}}\int\limits_\delta^M (e^{-\tau}[\frac{e^{-M\tau}}{\tau}]d\tau \;\leq\; \frac{1}{\delta\sqrt{M}(1+M)} \;\leq\; \epsilon$ se $(1+M)\sqrt{M} \;\geq\; \frac{1}{\delta\epsilon}$. Ció prova $(*)$. Analogamente

$B(\delta, M) \;\leq \epsilon \;+\; \int_\delta^M (\int_{[0,\delta]\cup[M,+\infty)} \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}}\, d\tau)\, d\theta$ se $\delta \leq \delta_\epsilon, M \geq M_\epsilon$,

mentre $\int\limits_\delta^M (\int_{[0,\delta]\cup[M,+\infty)} \frac{e^{-(1+\theta)\tau}}{\sqrt{\theta}}\, d\tau)\, d\theta \;=\; \int\limits_\delta^M \frac{1-e^{-(1+\theta)\delta} + e^{-(1+\theta)M)}}{(1+\theta)\sqrt{\theta}} \;\leq\; [(1+\delta)\delta + e^{-M}]\pi$ e questo prova $(**)$.