AM2: Tracce delle lezioni-II settimana

ALCUNI INTEGRALI CHE BISOGNA CONOSCERE

1. (integrali immediati)

$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \ = \ \arctan x$

$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \ = \ \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x, \quad |x| < 1$

$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \ = \ \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad x \in \mathbf{R}$

$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt \ = \ \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \quad , \forall \ x > 1$

2. (mediante integrazione per parti)

$\int_0^x \sin^2 t\,dt \ = \ \int_0^x \cos^2 t\,dt \ - \ \cos x \sin x \Rightarrow$

$\int_0^x \sin^2 t\,dt \ = \ \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x), \qquad \int_0^x \cos^2 t\,dt \ = \ \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$

$\int_0^x \sinh^2 t\,dt \ = \ -\int_0^x \cosh^2 t\,dt \ + \ \cosh x \sinh x \Rightarrow$

$\int_0^x \sinh^2 t\,dt \ = \ \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x \ - x), \qquad \int_0^x \cosh^2 t\,dt \ = \ \frac{1}{2}(x + \sinh x \cosh x)$

$\int_1^x \log t\,dt \ = \ -\int_1^x dt \ + \ t \log t|_1^x = 1 - x + x \log x$

$\int_0^x \arctan t dt \ = \ -\int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt \ + \ t \arctan t|_0^x = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

3. (integrazione mediante cambio di variabile)

$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt = (t := \sin s) \int_0^{\sin^{-1} x} \cos^2 s ds = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x + x\sqrt{1-x^2})$

$\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt = (t := \cosh s) \int_0^{\cosh^{-1} x} \sinh^2 s ds =$

$= \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \cosh^{-1} x) = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1} - \log(x + \sqrt{x^2-1})]$

$\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt = (t =: \sinh s) \int_0^{\sinh^{-1} x} \cosh^2 s ds = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ \sinh^{-1} x) =$

$= \frac{1}{2}[x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})]$

ESEMPI DI UTILIZZAZIONE DELLA FORMULA DI CAMBIO DI VARIABILE

1. f pari $\Rightarrow$ $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ é dispari. In paricolare, $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$

2. f dispari $\Rightarrow$ $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ é pari. In particolare, $\int_{-a}^a f = 0$.

3. Sia f funzione $T-$periodica (cioé $f(t+T) = f(t) \quad \forall\, t$). Allora

$$\int_0^x f(t)\,dt \text{ é T-periodica se e solo se } \int_0^T f = 0$$

Per provare 1. e 2. basta usare il cambio di variabile $t = -s$. Circa 3., usando il cambio di variabile $t = s + T$ si trova:

3i) $\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt = \int_a^b f(s+T)\,ds = \int_a^b f$

3ii) $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^T f + \int_T^{a+T} f = \int_a^T f + \int_0^a f = \int_0^T f \quad \forall\ a$

3iii) $\int_0^{x+T} f = \int_0^x f + \int_x^{x+T} f = \int_0^x f + \int_0^T f = \int_0^x f$ se e solo se $\int_0^T f = 0$.

Esercizio. Provare, usando 3. ed il cambio di variabile $t := s + \frac{\pi}{2}$, che

$$\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = \int_0^\pi \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}$$

INTEGRAZIONE PER PARTI: FORMULE ITERATIVE

1. Se $I_n(x) := \int_0^x t^n e^t\,dt$, é $I_n(x) = x^n e^x - nI_{n-1}(x)$

2. Se $I_n(x) := \int_0^x t^n e^{-t}\,dt$, é $I_n(x) = nI_{n-1}(x) - x^n e^{-x}$

3. Se $S_n(x) := \int_0^x \sin^n t\,dt$, $C_n(x) := \int_0^x \cos^n t\,dt$, é

$S_n(x) = (1-\frac{1}{n})S_{n-2}(x) - \frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x$, $C_n(x) = (1-\frac{1}{n})C_{n-2} + \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x$

4. $S_{2n}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\dots(1-\frac{1}{2n})$ $S_{2n+1}(\frac{\pi}{2}) = (1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})\dots(1-\frac{1}{2n+1})$.

Da cui la formula di Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = [\frac{2\,4\,\dots 2n}{3\,5\dots(2n-1)}]^2 \frac{1}{2n+1} + \circ(1)$$

5. Se $I_n(x) := \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt,$ é $I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}$

6.Se $I_n(x) := \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}}\, dt,$ é $I_n(x) = \frac{n-2}{n} I_{n-2} - \frac{t^{n-2}}{n(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}$

Esecuzione dei calcoli:

1. $\int_0^x t^n e^t dt = -n \int_0^x t^{n-1} e^t + x^n e^x$, 2. $\int_0^x t^n e^{-t} dt = n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} - x^n e^{-x}$

3. $\int_0^x \sin^n t dt = \int_0^x \sin^{n-1} t \sin t dt = (n-1) \int_0^x \sin^{n-2} t \cos^2 t dt - \sin^{n-1} x \cos x$

$\Rightarrow n \int_0^x \sin^n t dt = (n-1) \int_0^x \sin^{n-2} t dt - \sin^{n-1} x \cos x$. 4.: da 3.

5. $\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = -\int_0^x t \frac{d}{dt} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \frac{t}{(1+t^2)^n}\Big|_0^x = 2n \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt + \frac{x}{(1+x^2)^n} =$

$2n \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \Rightarrow 2n \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} dt = (2n-1) \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^n} + \frac{x}{(1+x^2)^n}.$

6. $I_n(x) = \int_0^x t^{n-2} \frac{d}{dt} [\frac{1}{n(1+t^2)^{\frac{n}{2}}} dt = \frac{n-2}{n} \int_0^x \frac{t^{n-3}}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}} dt - \frac{x^{n-2}}{n(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}.$

Concludiamo con una estensione del Teorema del valor medio in forma integrale, fornita dal Teorema Fondamentale del Calcolo: se $\varphi \in C^1([0,1]), \varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t) dt = \varphi(0) + \varphi(p.i.)$.

Formula di Taylor con resto in forma integrale . Sia $\varphi \in C^\infty([0,1])$. Allora, per ogni naturale n, si ha

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \varphi^{(n)}(t) dt \quad (*)_n$$

Dimostrazione. Infatti, $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t) dt$: $(*)_1$ é vera.
Supponiamo $(*)_n$ vera. Mediante una integrazione per parti, otteniamo

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \varphi^{(n)}(t) dt = -\frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 -\frac{(1-t)^n}{n} \varphi^{(n+1)}(t) dt - \frac{(1-t)^n}{n!} \varphi^{(n)}(t)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \varphi^{(n+1)}(t) dt + \frac{1}{n!} \varphi^{(n+1)}(0)$$

Segue allora che $(*)_{n+1}$ é vera.

INTEGRALI ESTESI A UNA SEMIRETTA
INTEGRALI IMPROPRI

PROBLEMA: Dare condizioni di esistenza e metodi di calcolo per integrali del tipo $\int_{\mathbf{R}} f\chi_{[a,+\infty)}$ (considerazioni del tutto analoghe per $\int_{\mathbf{R}} f\chi_{(-\infty,b]}$).

Le funzioni che considereremo si assumeranno nulle fuori di $[a,+\infty)$ ed integrabili in $[a,x]$ $\forall\, x \geq a$. Nel seguito, integrabile significherá integrabile in $[a,+\infty)$.

NOTAZIONE: Se f é integrabile, si scrive $\int_a^{+\infty} f := \int_{\mathbf{R}} f\chi_{[a,+\infty)}$.

Teorema 1.

(i) f é integrabile $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x |f| < +\infty$.

(ii) f integrabile $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$

Dimostrazione.

(i) Necessitá: da $|f| \geq 0$ e dalla additivitá dell'integrale segue che $x \to \int_a^x |f|$ é non decrescente e quindi esiste $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x |f|$. Da $\int_a^x |f| \leq \int_a^{+\infty} |f|$ segue che tale limite é finito. Sufficenza: in Appendice.

(ii) Come in (i), $\int_a^x f^+$ e $\int_a^x f^-$ sono funzioni non decrescenti e superiormente limitate da $\int_{\mathbf{R}} |f|$ e quindi esiste finito $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f = \lim_{x\to+\infty}(\int_a^x f^+ - \int_a^x f^-)$. Resta da provare che $\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$. Questo fatto segue da $|\int_a^{+\infty} f - \int_a^x f| \leq \int_x^{+\infty} |f|$ e dal seguente

Lemma . Sia f integrabile. Allora $\int_x^{+\infty} |f| \to_{x\to+\infty} 0$

Dimostrazione in Appendice.

NOTA. Il fatto che $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$ esista finito é condizione necessaria ma non sufficente perché f risulti integrabile (vedi CONTROESEMPIO piú avanti).

NOTAZIONE: $\int_a^{+\infty} |f| := \lim_{x\to+\infty}\int_a^x |f|$

sia che il limite a secondo membro sia finito od infinito.

Con tale notazione, il Teorema 1-(i) si riscrive

$$f \text{ integrabile in } [a,+\infty) \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} |f| < +\infty$$

Corollario. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) f non é integrabile (ii) $\int_a^{+\infty} |f| = +\infty$ (iii) $\underline{I}(|f|) = +\infty$

Visto il Teorema 1-(i), basta mostrare che (ii) $\Rightarrow$ (iii):

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x |f| = +\infty \Rightarrow \forall R > 0, \exists x : \int_a^x |f| \geq R+1 \Rightarrow \exists I_j : s(|f|\chi_{[a,+\infty)}; I_j) \geq$$

$$\geq s(|f|\chi_{[a,x]}; I_j) \geq R \Rightarrow \underline{I}(|f|) = +\infty$$

ESEMPI .

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \arctan t\,|_0^x = \frac{\pi}{2}$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}|_1^x = \frac{1}{\alpha-1}$, se $\alpha > 1$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}|_1^x = +\infty$ se $\alpha < 1$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = \log t|_1^{+\infty} = +\infty$

e) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} = n!$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1\,3\,5...(2n-1)}{2\,4...2n}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{2n+1}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{2n+1}})$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}} = \frac{1}{n}$

h) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Traduciamo ora nei termini della condizione di Cauchy la proprietá $\int_a^x |f| < +\infty$ (rispettivamente, $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$ esiste finito).

Proposizione 2.

(i) $\int_a^{+\infty} |f| < +\infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon : x_\epsilon \leq x_1 < x_2 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} |f| \leq \epsilon$

(ii) $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$ esiste finito $\Leftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists x_\epsilon: \ x_\epsilon \le x_1 < x_2 \Rightarrow |\int_{x_1}^{x_2} f| \le \epsilon$

(iii) $\int_a^{+\infty} |f| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$ esiste finito

Dimostrazione. (i) É la condizione di Cauchy perché esista finito il limite, per x tendente all'infinito, di $F(x) := \int_a^x |f| : \quad F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} |f|$.
(ii) Come in (i), con $F(x) := \int_a^x f$.
(iii) segue da $|\int_{x_1}^{x_2} f| \le \int_{x_1}^{x_2} |f|$.

Diamo ora condizioni sufficenti, senplici ma molto utili, di integrabilitá /non integrabilitá per f (equivalentemete, per $|f|$).

Teorema del Confronto.

(i) $\exists R \ge a: \ |f(x)| \le g(x) \ \ \forall x \ge R, \ \ \int_a^{+\infty} g < +\infty \ \Rightarrow \ \int_a^{+\infty} |f| < +\infty$

(ii) $\exists R \ge a: \ 0 \le g \le f \ \ \forall x \ge R, \ \ \int_a^{+\infty} g = +\infty \ \Rightarrow \ \int_a^{+\infty} f = +\infty$

Dimostrazione. (i)

$\int_a^{+\infty} g < +\infty \ \Leftrightarrow \ \sup_{x\ge a}\int_a^x g < +\infty \ \Rightarrow \sup_{x\ge a}\int_a^x |f| < +\infty$ perché $|f(x)| \le g(x) \ \forall x \ge R \ \Rightarrow \ \int_a^x |f| = \int_a^R |f| + \int_R^x |f| \le \int_a^R |f| + \int_R^x g$ e quindi $\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$.

(ii) Analogo: $\int_a^{+\infty} g = +\infty \ \Leftrightarrow \ \sup_{x\ge a}\int_a^x g = +\infty \ \Rightarrow \sup_{x\ge a}\int_a^x f = +\infty$ perché $f \le g$ per x grande e quindi $\int_a^{+\infty} |f| = +\infty$

Corollario A.

(i) $\exists M, R > 0, \ \alpha > 1: \ |f(x)| \le \frac{M}{x^\alpha} \ \ \forall\, x \ge R \ \Rightarrow \ f$ é integrabile in $[a, +\infty)$ (e quindi é integrabile in senso generalizzato)

(ii) $\exists M, R > 0: \ |f(x)| \ge \frac{M}{x}, \ \ \forall\, x \ge R \ \Rightarrow \ \int_a^{+\infty} |f| = +\infty$

Dimostrazione.

(i) Segue dal Teorema del confronto: infatti $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} < +\infty$ se $\alpha > 1$ (Esempi 2-b)
(ii) Analogo: $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty$.

Corollario B: integrabilitá e comportamento asintotico.

(i) $\exists \alpha > 1 : \; x^{\alpha}|f(x)| \to_{x\to+\infty} c < +\infty \;\; \Rightarrow \; f$ integrabile

(ii) $x|f(x)| \to_{x\to+\infty} c > 0 \;\; \Rightarrow \; \int_a^{+\infty} |f| = +\infty$

Integrabilitá in senso generalizzato-Integrali impropri.

Senza ipotesi di integrabilitá su f, $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$ non esisterá, in generale (ad es., $f(x) = \sin x$). Infatti il limite per x tendente all'infinito di $\int_a^x f = \int_a^x f^+ - \int_a^x f^-$ sará infinito o potrá non esistere affatto se una o entrambe le funzioni $\int_a^x f^+$, $\int_a^x f^-$ divergono per x tendente all'infinito.

Puó tuttavia accadere , pur se f non é integrabile, che $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$ esista ugualmente. Tale circostanza é oggetto della

Definizione (di Integrale Improprio).

f si dice integrabile in senso improprio (o in senso generalizzato) se

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f \quad \text{esiste finito}$$

e diremo (con abuso di linguaggio: f potrebbe non essere integrabile in $[a, +\infty)$!) che

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

é l'integrale improprio (o in senso generalizzato) di f su $[a, +\infty)$.

Integrabilitá e integrabilitá impropria.

Dal Teorema 1 segue:

se $f \geq 0$, allora f é integrabile $\Leftrightarrow$ f é integrabile in senso generalizzato

se f cambia segno, allora f é integrabile $\Rightarrow$ f é integrabile in senso improprio (ma non viceversa!)

Il fatto che l'integrabilitá in senso generalizzato non implichi l'integrabilitá é illustrato dai seguenti

CONTROESEMPIO 1. $\quad f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n-1,n)}(x)$

(funzione che vale $\frac{(-1)^n}{n}$ in $[n-1,n)$ e zero in $(-\infty,0)$).

(i) $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

(ii) f non é integrabile su $[0,+\infty)$, perché $\int_0^{+\infty} |f| = +\infty$

Verifica di (i):

$$\int_0^x f = \int_0^{[x]} f + \int_{[x]}^x f = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{(-1)^n}{n} + \circ(1)$$

($|\int_{[x]}^x f| \le \frac{1}{1+[x]} \to_{x\to+\infty} 0!$) e quindi

$$\int_0^x f \to_{x\to+\infty} \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Verifica di (ii): $|f| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \chi_{[n-1,n]}$, $\quad$ e quindi $\underline{I}(|f|) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

CONTROESEMPIO 2. $\quad f(x) := \frac{\sin x}{x}\chi_{[1,+\infty)}$

é integrabile in senso generalzzato ma non é integrabile:

(i) $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt = +\infty$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ esiste finito.

Prova di (i). Sia $I := \{x \in [0,\pi] : \ \sin x \ge \frac{1}{2}\}$, $\ I_n := I + (n-1)\pi$. É

$l(I_n) = l(I) > 0 \ \ \forall n \in \mathbf{N}$ e $|\frac{\sin x}{x}| \ge \frac{1}{2n\pi}$, $\ \forall x \in I_n$. Dunque

$$\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt \ge \int_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n\pi}\chi_{I_n}(t)dt \ge l(I) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n\pi} = +\infty$$

Prova di (ii).

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt = -\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt - \frac{\cos t}{t}|_1^x \to -\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt + \cos 1.$$

Infatti $\int_1^{+\infty} |\frac{\cos t}{t^2}|\, dt < +\infty$ perché $|\frac{\cos t}{t^2}| \le \frac{1}{t^2}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} < +\infty$.

APPENDICE

Deduzione della Formula di Wallis. Sia $S_j := S_j(\frac{\pi}{2})$. Si ha

$S_{2n} = (1-\frac{1}{2n})S_{2n-2} = (1-\frac{1}{2n})(1-\frac{1}{2n-2})S_{2n-4} =$

$(1-\frac{1}{2n})(1-\frac{1}{2n})\dots(1-\frac{1}{4})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt = (1-\frac{1}{2n})(1-\frac{1}{2n-2})\dots(1-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$

$S_{2n+1} = (1-\frac{1}{2n+1})S_{2n-1} = (1-\frac{1}{2n+1})(1-\frac{1}{2n-1})S_{2n-3} =$

$(1-\frac{1}{2n+1})(1-\frac{1}{2n-1})\dots(1-\frac{1}{3})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt = (1-\frac{1}{2n+1})(1-\frac{1}{2n-1})\dots(1-\frac{1}{3})$.

Poi, $\sin x \leq 1 \Rightarrow S_{2n-1} \geq S_{2n} \geq S_{2n+1} \Rightarrow \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} \geq \frac{S_{2n}}{S_{2n-1}} \geq 1$. Ma

$\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$, $\qquad \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = \frac{3\,5\,\dots(2n-1)}{2\,4\,\dots 2n}\frac{3\,5\,\dots(2n-1)(2n+1)}{2\,4\,\dots 2n}\frac{\pi}{2}$ e quindi

$\frac{2n}{2n+1} \geq [\frac{3\,5\,\dots(2n-1)}{2\,4\,\dots 2n}]^2(2n+1)\frac{\pi}{2} \geq 1$ e quindi $\frac{\pi}{2}(2n+1)[\frac{3\,5\,\dots(2n-1)}{2\,4\,\dots 2n}]^2 = 1 + \circ(1)$

Dimostrazione del Lemma . Possiamo assumere $f \geq 0$ ($|f|$ é integrabile !). Sia I_j tale che $S(f;I_j) < +\infty$. Se $\sup I_{j_0} = +\infty$ per un j_0, allora $f \equiv 0$ in I_{j_0} e quindi $\int_x^{+\infty} f = 0$ per $x \in I_{j_0}$ (e quindi per x grande). Sia $\sup I_j < +\infty \quad \forall j$. Da $\sum_j(\sup_{I_j} f)\,l(I_j) < +\infty$ segue che, fissato $\epsilon > 0$, $\exists j_\epsilon$ tale che $\sum_{j\geq j_\epsilon}(\sup_{I_j} f)\,l(I_j) \leq \epsilon$. Sia $x > \sup I_j$, for $j = 1,\dots,j_\epsilon$, e quindi $I_j \cap [x,+\infty) = \emptyset, j = 1,\dots,j_\epsilon$. Allora

$$\int_x^{+\infty}|f| \;\leq\; \sum_j(\sup_{I_j} f\chi_{[x,+\infty)})\,l(I_j) \;\leq\; \sum_{j\geq j_\epsilon}(\sup_{I_j} f)\,l(I_j) \leq \epsilon$$

Dimostrazione di $\Leftarrow$ in Teorema 1-(i). Sia $a = x_1 < x_2 < \dots,\ x_n \to +\infty,\ I_n := [x_n, x_{n+1}),\ n \in \mathbf{N}$.

É $\infty > \lim_{n\to+\infty}\int_a^{x_n}|f| = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}|f| = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}|f|$.

Poi, dall'integrabilitá di $|f|\chi_{I_n}$, segue che, $\forall n$ esiste una partizione $(I_{nj})_{j\in\mathbf{N}}$ tale che $\sum_j(\sup_{I_{nj}}|f|\chi_{I_n})\,l(I_{nj}) \leq \frac{1}{2^n} + \int_{x_n}^{x_{n+1}}|f|$ e quindi

$$\sum_n\sum_j(\sup_{I_{nj}\cap I_n}|f|)\,l(I_{nj}\cap I_n) \;\leq\; \sum_n\sum_j(\sup_{I_{nj}}|f|\chi_{I_n})\,l(I_{nj}) \;\leq\; 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}|f| \;<\; +\infty$$

Siccome $(I_{nj}\cap I_n)_{n,j\in\mathbf{N}}$ é chiaramente partizione, troviamo che $\overline{I}(|f|) < +\infty$.

Di nuovo dall'integrabilitá di $|f|\chi_{I_n}$, segue che, fissato $\epsilon > 0$, $\forall n$ esiste una partizione I_{nj} tale che $\sum_j(\sup_{I_{nj}}|f|\chi_{I_n})\,l(I_{nj}) - \sum_j(\inf_{I_{nj}}|f|\chi_{I_n})\,l(I_{nj}) \leq \frac{\epsilon}{2^n}$ e quindi

$$\sum_n\sum_j(\sup_{I_{nj}\cap I_n}|f|)\,l(I_{nj}\cap I_n) \;-\; \sum_n\sum_j(\inf_{I_{nj}\cap I_n}|f|)\,l(I_{nj}\cap I_n) \;\leq\; \epsilon$$