AM2: Tracce delle lezioni-I settimana

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

NOTAZIONI:

Converremo che $+\infty\, a = +\infty$ se $a > 0$ e che $0\,\infty = 0$.

I indicherá un intervallo, $l(I)$ la sua lunghezza ($l(I) = +\infty$ se I é illimitato).
Se $I_j,\ j = 1, \ldots, n$ sono intervalli disgiunti, scriveremo $l(\cup_{j=1}^n I_j) = \sum_{j=1}^n l(I_j)$. Notare che se J_i sono n intervalli é $l(\cup_i J_i) \leq \sum_i l(J_i)$.

$I_j,\ j \in \mathbf{N}$ é partizione di $\mathbf{R}$ se $\cup_j I_j = \mathbf{R}$ e $I_i \cap I_j = \emptyset\ \forall i \neq j$. Se $I_j,\ J_i$ sono partizioni di $\mathbf{R}$, $I_{ij} := I_j \cap J_i$, (ugualmente partizione di $\mathbf{R}$) si chiama raffinamento di I_j, J_i. Notare che $I_j = \cup_i I_{ij}$, $J_i = \cup_j I_{ij}$ (unioni disgiunte!)

Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$,

$$\inf_A f := \inf\{f(x) : x \in A\}, \qquad \sup_A f := \sup\{f(x) : x \in A\}$$

Se $A \subset \mathbf{R}$, $\chi_A \equiv 1$ in A, $\chi_A \equiv 0$ fuori di A é la funzione caratteristica di A.

$f^+ := f\chi_{\{x:f(x)\geq 0\}}$ $\quad (f^+(x) = 0$ se $f(x) \leq 0$, $f^+(x) = f(x)$ se $f(x) \geq 0)$

$f^- := -f\chi_{\{x:f(x)\leq 0\}}$ $\quad (f^-(x) = 0$ se $f(x) \geq 0$, $f^-(x) = -f(x)$ se $f(x) \leq 0)$

ALCUNI FATTI ELEMENTARI

$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-, \qquad (-f)^+ = f^-, \qquad (-f)^- = f^+$

$(f + g)^+ \leq f^+ + g^+, \qquad (f + g)^- \leq f^- + g^-.$

$\inf_{A\cup B} f \leq \inf_A f \leq \sup_A f \leq \sup_{A\cup B} f$

$\inf_A f + \inf_A g \leq \inf_A(f + g) \leq \sup_A(f + g) \leq \sup_A f + \sup_A g$

$\sup_A(-f) = -\inf_A f, \qquad \inf_A(-f) = -\sup_A f.$

(*) $I_j, j \in \mathbf{N}$ disgiunti, $I := \cup_{j=1}^{+\infty} I_j$ é intervallo $\Rightarrow l(I) = \sum_{j=1}^{+\infty} l(I_j)$.

Somme (inferiori/superiori) di Riemann, integrale (inferiore/superiore)

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0\ \forall x$, I_j partizione di $\mathbf{R}$. Scriveremo

$$s(f; I_j) := \sum_j (\inf_{I_j} f)\ l(I_j) \qquad \text{(somme inferiori)}$$

$$S(f; I_j) := \sum_j (\sup_{I_j} f)\ l(I_j) \qquad \text{(somme superiori)}$$

$$\underline{I}(f) := \sup\{s(f; I_j) :\ I_j \text{ partizione di } \mathbf{R}\} \qquad \text{(integrale inferiore)}$$

$$\overline{I}(f) := \inf\{S(f; I_j) :\ I_j \text{ partizione di } \mathbf{R}\} \qquad \text{(integrale superiore)}$$

DUE ESEMPI.

Sia $0 \leq f(x) \leq M\ \ \forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ se $|x| \geq R$. Allora $\overline{I}(f) \leq 2MR$. Infatti, se $I_1 := (-\infty, R), I_2 := [-R, R], I_3 := (R, +\infty)$, allora $S(f; I_j) = \sup_{I_2} f \leq 2MR$.

Sia $f = \chi_{\mathbf{Q}}$. É $\overline{I}(\chi_{\mathbf{Q}}) = +\infty, \underline{I}(\chi_{\mathbf{Q}}) = 0$. Infatti, é $\sup_I \chi_{\mathbf{Q}} = 1, \inf_I \chi_{\mathbf{Q}} = 0$ per ogni intervallo I (che non sia un punto, che peró ha lunghezza zero!).

Lemma 1 $\quad s(f; I_j) \leq S(f; J_i)\ \ \forall I_j, J_i \qquad$ e quindi $\qquad \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$

Definizione di integrabilitá e di integrale. $f \geq 0$ si dice integrabile se

$$\overline{I}(f) < +\infty \qquad \text{e} \qquad \overline{I}(f) = \underline{I}(f)$$

Diremo in tal caso che $I(f) := \overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ é l'integrale di f .

Diremo che $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é (Riemann) integrabile se lo sono f^+ ed f^- e che

$$I(f) := I(f^+) - I(f^-)$$

é l'integrale di f. Scriveremo anche

$$\int_{\mathbf{R}} f \ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \ := I(f)$$

Teorema 1 (l'integrazione é una operazione lineare). L'insieme delle funzioni integrabili, dotato delle operazioni usuali, é uno spazio vettoriale ed I é un funzionale lineare:

f, g integrabili, $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow \ af + bg$ é integrabile e $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$

Teorema 2 (positivitá dell'integrale)

(i) f, g integrabili, $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$

(ii) f integrabile $\Rightarrow |f|$ integrabile e $|\int_{\mathbf{R}} f| \leq \int_{\mathbf{R}} |f|$

(i): $0 \leq g - f \Rightarrow 0 \leq I(g-f) = I(g) - I(f)$. (ii) $|f| = f^+ + f^- \Rightarrow |f|$ é integrabile e $|\int_{\mathbf{R}} f| = |\int_{\mathbf{R}} f^+ - \int_{\mathbf{R}} f^-| \leq \int_{\mathbf{R}} f^+ + \int_{\mathbf{R}} f^- = \int_{\mathbf{R}} |f|$.

NOTA 1. L'integrabilitá di $|f|$ non comporta (sfortunatamente!) l'integrabilitá di f (ad esempio, $f = \chi_{[0,1]\cap(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})} - \chi_{[0,1]\cap\mathbf{Q}}$).

ESEMPI

1. Se I é intervallo limitato, χ_I é integrabile e $\int_{\mathbf{R}} \chi_I = l(I)$. Sia $I^c = I_1 \cup I_2, I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_3 := I$. Usando la partizione I_1, I_2, I_3, si trova $S(\chi_I; I_j) = l(I) = s(\chi_I; I_j)$

2. Se I_j sono intervalli limitati disgiunti, $\chi_{\cup_{j=1}^n I_j}$ é integrabile per ogni n e $\int \chi_{\cup_{j=1}^n I_j} = \sum_{j=1}^n l(I_j)$. Segue da $\chi_{\cup_{j=1}^n I_j} = \sum \chi_{I_j}$ e dalla linearitá dell'integrale.

Domanda: $\chi_{\cup_{j=1}^\infty I_j}$ é integrabile? Risposta: in generale no! Peró...

3. $f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \chi_{[j-1,j)}(x)$, $a_j \geq 0$ (funzione costante a tratti: vale a_j in $[j-1, j)$ e vale 0 in $(-\infty, 0)$). Se $I_0 = (-\infty, 0), I_j = [j-1, j), j = 1, 2, \ldots$, é $S(f; I_j) = s(f; I_j) = \sum_j a_j$. Dunque f é integrabile se e solo se la serie $\sum_j a_j$ converge e $I(f) = \sum_{j=1}^\infty a_j$. Analogamente, se gli α_j sono qualsiasi, f é integrabile sse $\sum_j |\alpha_j| < +\infty$.

4. $f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \chi_{(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]}(x)$, $a_j \geq 0$. Come sopra si vede che $I(f) = \sum_{j=1}^\infty \frac{a_j}{j(j+1)}$ e f é integrabile se e solo se tale serie converge.

Teorema 3 (di Riemann) . Sia f limitata, nulla fuori di un compatto e tale che D_f:= insieme dei punti di discontinuitá di f sia finito. Allora f é integrabile.

Proposizione 1. f integrabile $\Rightarrow f\chi_I$ é integrabile.

Integrale esteso a un insieme

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, A \subset \mathbf{R}$. Diremo che f é integrabile su A se $f\chi_A$ é integrabile e scriveremo

$$\int_A f \ := \int_{\mathbf{R}} f\chi_A$$

NOTA 2. Se f é solo definita in A, la intenderemo definita su tutto $\mathbf{R}$ con $f \equiv 0$ in A^c.

Se f é integrabile in I e $J \subset I$, allora f é integrabile in J:

$$f\chi_I \text{ integrabile } \Rightarrow f\chi_J = f\chi_I\, \chi_J \ \text{ é integrabile}$$

La classe delle funzioni integrabili su un insieme A é uno spazio vettoriale e l'operazione $f \to \int_A f$ é lineare e positiva.

Sia f integrabile, $I = [a, b], a < b, J = (a, b)$, oppure $J = [a, b)$ oppure $J = (a, b]$. É facile verificare che $\int_I f = \int_J f$.

Teorema 4 (additivitá dell'integrale). Sia f integrabile su A, B insiemi disgiunti. Allora

$$\int_{A\cup B} f \ = \int_A f \ + \int_B f$$

Infatti $\int_{A\cup B} f \ = \int_{\mathbf{R}} f\chi_{A\cup B} = \int_{\mathbf{R}} f(\chi_A + \chi_B) = \int_{\mathbf{R}} f\chi_A \ + \int_{\mathbf{R}} f\chi_B = \int_A f \ + \int_B f$.

Proposizione 2 . Sia f integrabile, I un intervallo. Allora

$$|\int_I f| \ \le \ \sup_I |f| \ l(I)$$

Infatti $\sup_I |f|\, l(I) = S(|f|\chi_I; I, I^c)$.

Teorema della media . Sia I un intervallo chiuso e limitato. Siano f, g continue in I, $g(x) \ge 0 \ \ \forall x \in I$. Allora

$$\exists \xi \in I : \ \int_I fg \ = \ f(\xi) \int_I g$$

In particolare

$$\exists \xi \in I : \ \int_I f \ = \ f(\xi) l(I)$$

Dimostrazione. Ovviamente f e g, prolungate a zero fuori di I, sono integrabili, e quindi sono integrabili su I. Per il teorema di Weierstrass, f é dotata di minimo e di massimo su I, e si ha

$$(\min_I f) g(x)\chi_I(x) \le f(x)g(x)\chi_I(x) \le (\max_I f) g(x)\chi_I(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Quindi, passando agli integrali ed usando la linearitá,

$$\min_I f \int_I g \leq \int_I fg \leq \max_I f \int_I g$$

Ora, possiamo supporre $\int_I g > 0$ (altrimenti non c'e niente da dimostrare) e concludere che $\frac{\int_I fg}{\int_I g} \in [\min_I f, \max_I f]$. La tesi segue allora dal Teorema del valore intermedio.

Basti poi osservare che, presa $g \equiv 1$, $\int_I g = l(I)$

Integrali orientati. Sia $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, f una funzione integrabile. Scriveremo anche

$$\int_a^b f := \int_{\mathbf{R}} f\chi_{(a,b)}, \quad \int_b^a f := -\int_a^b f$$

Le proprietá viste finora per $I(f)$ si riscrivono in modo ovvio per gli integrali orientati. Notiamo ad esempio che $f \leq g, a > b \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Di fondamentale importanza é la seguente riformulazione della additivitá: se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é integrabile e $a, b, c \in [-\infty, +\infty]$ allora

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0$$

Infatti, se due tra a, b, c coincidono, tale relazione é vera per definizione. Altrimenti, uno dei tre é strettamente compreso tra gli altri due. Diciamo, per fissare le idee, che sia c ad essere compreso tra a e b. Detto $I(a, b)$ l'integrale (non orientato) di f esteso all'intervallo di estremi a e b, e definiti in modo analogo $I(b, c)$ e $I(c, a)$, per additivitá si ha $I(a, b) = I(b, c) + I(c, a)$. Dunque,

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = I(a, b)\frac{b-a}{|b-a|} + I(b, c)\frac{c-b}{|c-b|} + I(c, a)\frac{a-c}{|a-c|} =$$

$$= I(b, c)[\frac{b-a}{|b-a|} + \frac{c-b}{|c-b|}] + I(c, a)[\frac{b-a}{|b-a|} + \frac{a-c}{|a-c|}]$$

Ma, siccome c é compreso tra a e b, se $c > b$ allora $b < c < a$, mentre se $c < b$ deve essere

$a < c < b$. In ogni caso $\frac{b-a}{|b-a|} + \frac{c-b}{|c-b|} = \frac{b-a}{|b-a|} + \frac{a-c}{|a-c|} = 0$.

Il Teorema Fondamentale del Calcolo-I.

Sia f limitata e integrabile in $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. Sia

$$F(x) \ := \ \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \ \ x \in [a,b]$$

Allora

i) F é continua in $[a,b]$

ii) se f é continua in $x \in (a,b)$ allora F é derivabile in x e $F'(x) = f(x)$

Dimostrazione. Usando l'additivitá dell'integrale, si ottiene

$$F(x+h) = F(x) + f(x)h + \int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)]dt$$

Siccome $| \int_x^{x+h}[f(t) - f(x)]dt| \leq \ 2|h| \sup \ |f| = O(h)$, F é continua in x.

Se f é continua in x, allora $| \int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]dt| \leq |h| \sup_{\{t:|t-x|\leq|h|\}} |f(t)-f(x)| = \circ(|h|)$ e quindi F é derivabile in x con $F'(x) = f(x)$.

Si puó quindi scrivere

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x)$$

in ogni punto x in cui f é continua.

NOTA 3. Se φ é di classe C^1 ed f é continua, allora

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)dt \ = \ f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

Corollario Sia f continua in $[a,b]$. Allora f é dotata di primitiva in (a,b).

Il Teorema Fondamentale del Calcolo-II .

Sia f continua in un intervallo aperto I. Sia P una primitiva di f in I. Allora

$$\int_a^b f \ = \ P\,|_a^b \ := \ [P(b) - P(a)] \qquad \forall \ [a,b] \subset I$$

Dimostrazione. Sia $F(x) = \int_a^x f$. Da $F' \equiv P'$ in I, segue che $F(x) - P(x) = F(a) - P(a) = -P(a)$ $\forall x \in I$, e quindi $\int_a^b f \ = \ F(b) = P(b) - P(a)$.

Potremo quindi scrivere, per una funzione $f \in C^1([a,b])$,

$$\int_a^b \frac{df}{dx}\, dx \;=\; f|_a^b$$

La formula di integrazione per parti .

Siano $f, g \in C^1([a,b])$. Allora

$$\int_a^b fg' \;= fg|_a^b \;-\int_a^b f'g$$

Dimostrazione. $\int_a^b fg' \;+\; f'g \;=\; \int_a^b (fg)' \;=\; fg|_a^b$.

La formula di cambiamento di variabile .

Sia $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$. Sia f continua in $[a,b] := \{\varphi(t) :\; t \in [\alpha,\beta]\}$. Allora

i) $\quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$

Se di piú $\varphi'(t) > 0 \;\; \forall t \in [\alpha,\beta]$ e quindi $a = \varphi(\alpha),\; b = \varphi(\beta)$ allora

ii) $\quad \int_a^b \; f(x)dx \;=\; \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$

Dimostrazione. $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \;=\; \int_\alpha^\beta (\frac{d}{dt}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)dx)dt \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f\,|_\alpha^\beta \;=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$.
Se di piú $\varphi'(t) \;>\; 0 \quad \forall t \;\in\; [\alpha,\beta]$, e quindi φ é invertibile in $[\alpha,\beta]$, posto $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, la formula i) si riscrive appunto come in ii).

APPENDICE.

Riportiamo qui le dimostrazioni, sopra omesse, di alcuni fatti.

Dimostrazione Lemma 1. Date I_j, J_i partizioni di $\mathbf{R}$, $I_{ij} := I_j \cap J_i, \quad I_{ij}$, da (*) segue:

$$s(f;I_{ij}) = \sum_{ij} \inf_{I_{ij}}\; f\, l(I_{ij}) \;\geq\; \sum_j \; \sum_i \inf_{I_j} f\, l(I_{ij}) \;=\; \sum_j \; \inf_{I_j} f\, l(I_j) = s(f;I_j)$$

$$S(f;I_{ij}) = \sum_{ij} \sup_{I_{ij}}\; f\, l(I_{ij}) \;\leq\; \sum_j \; \sum_i \sup_{I_j} f\, l(I_{ij}) \;=\; \sum_j \; \sup_{I_j} f\, l(I_j) = S(f;I_j)$$

(raffinando la partizione le somme inferiori crescono, le somme superiori decrescono).

Avendo usato (*), lo andiamo qui a dimostrare. Chiaramente $\sum_{j=1}^{n} l(I_j) \leq l(I) \quad \forall n \in \mathbf{N}$ e quindi $\sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) \leq l(I)$. Poi, sia $[a,b] \subset I$. Posto $I_j^{\epsilon} := (\inf I_j - \frac{\epsilon}{2^j}, \sup I_j + \frac{\epsilon}{2^j})$, si ha: $\quad [a,b] \subset \cup_{j=1}^{\infty} I_j^{\epsilon} \Rightarrow \exists N_\epsilon$ tale che $[a,b] \subset \cup_{j=1}^{N_\epsilon} I_j^{\epsilon} \Rightarrow b-a \leq 2\epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j),\ \forall \epsilon > 0 \Rightarrow b-a \leq \sum_j l(I_j),\ \forall [a,b] \subset I \Rightarrow l(I) \leq \sum_j l(I_j)$.

Dalle diseguaglianze sopra dimostrate, unite alla ovvia $S(f;I_{ij}) \geq s(f;I_{ij})$, otteniamo $s(f;I_j) \leq S(f;J_i)$. Data l'arbitrarietá di I_j, J_i, deduciamo anche che $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$.

Dimostrazione Teorema 1. Consideriamo dapprima il caso di funzioni non negative e proviamo che:

i) $\underline{I}(tf) = t\underline{I}(f) \quad \overline{I}(tf) = t\overline{I}(f) \quad \forall t \geq 0, \forall f \geq 0$
ii) $\underline{I}(f+g) \geq \underline{I}(f) + \underline{I}(g), \quad \overline{I}(f+g) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g), \quad \forall f,g \geq 0$ e quindi
$f,g \geq 0$ integrabili $\Rightarrow I(f+g) = I(f) + I(g)$.

i) segue da: $\inf_I(tf) = t \inf_I f \quad , \quad \sup_I(tf) = t \sup_I f$.
ii) Siano I_j, J_i partizioni di $\mathbf{R}$, $I_{ij} := I_j \cap J_i$. É

$$\underline{I}(f+g) \geq \sum_{ij} \inf_{I_{ij}} (f+g)\, l(I_{ij}) \geq \sum_{ij} \inf_{I_{ij}} f\, l(I_{ij}) + \sum_{ij} \inf_{I_{ij}} g\, l(I_{ij}) \geq s(f;I_j) + s(g;J_i)$$

Dalla arbitrarietá delle partizioni I_j e J_i, concludiamo che $\underline{I}(f+g) \geq \underline{I}(f) + \underline{I}(g)$. La subadditivitá di $\overline{I}$ segue in modo analogo.

NOTA. Notiamo esplicitamente che non é in generale vero che $\underline{I}(f+g) = \underline{I}(f) + \underline{I}(g)$. Prendere ad esempio $f = \chi_{\mathbf{Q}},\ g = \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}: \quad \underline{I}(f+g) = +\infty, \underline{I}(f) = \underline{I}(g) = 0$.

Proviamo ora che f integrabile $\Rightarrow af$ é integrabile e $I(af) = aI(f)$. Se $a \geq 0$ ció segue da $(af)^+ = af^+, (af)^- = af^-$ e da i): $I(af) = I((af)^+) - I((af)^-) = I(af^+) - I(af^-) = aI(f^+) - aI(f^-)$. Poi, $I(-f) = I((-f)^+) - I((-f)^-) = I(f^-) - I(f^+) = -I(f)$. Dunque, se $a < 0$, $I(af) = I(-|a|f) = -I(|a|f) = -|a|I(f)$.

Proviamo ora che f,g integrabili $\Rightarrow f+g$ é integrabile. In primo luogo,

$$(f+g)^+ \leq f^+ + g^+ \Rightarrow \overline{I}((f+g)^+) \leq \overline{I}(f^+) + \overline{I}(g^+) < +\infty$$

e, analogamente, $\overline{I}((f+g)^-) < +\infty$.

Resta da provare che $\overline{I}((f+g)^+) \leq \underline{I}((f+g)^+)$ ovvero che, fissato $\epsilon > 0$ esiste una partizione I_j tale che $S((f+g)^+; I_j) - s((f+g)^+; I_j) \leq \epsilon$ ((e lo stesso per $(f+g)^-)$.

Consideriamo una partizione I_j tale che

$$S(h; I_j) - s(h; I_j) \leq \epsilon, \quad h = f^+, f^-, g^+, g^-$$

(l'esistenza di tale partizione é assicurata dall' ipotesi di integrabilitá di f^+, f^-, g^+, g^-) e cominciamo con l'osservare che

$$S((f+g)^+; I_j) = \sum_{j \in \mathbf{N}_0} \sup_{I_j} (f+g)^+ l(I_j), \qquad s((f+g)^+; I_j) = \sum_{j \in \mathbf{N}_0} \inf_{I_j} (f+g)^+) l(I_j)$$

ove $\mathbf{N}_0 := \{j \in \mathbf{N} : \ \sup_{I_j} (f+g)^+ > 0\}$. Ora,

$$\sup_{I_j} (f+g)^+ = \sup_{I_j} (f^+ + g^+ - f^- - g^-) \leq \sup_{I_j} f^+ + \sup_{I_j} g^+ - \inf_{I_j} f^- - \inf_{I_j} g^-, \ \ \forall j \in \mathbf{N}_0$$

$$\inf_{I_j} (f+g)^+ \geq \inf_{I_j} (f^+ + g^+ - f^- - g^-) \geq \inf_{I_j} f^+ + \inf_{I_j} g^+ - \sup_{I_j} f^- - \sup_{I_j} g^-, \ \ \forall j \in \mathbf{N}$$

Ne consegue che

$$S((f+g)^+; I_j) - s((f+g)^+; I_j) \leq$$

$$\sum_{j \in \mathbf{N}_0} [(\sup_{I_j} f^+ - \inf_{I_j} f^+ \sup_{I_j} g^+ - \inf_{I_j} g^+ + \sup_{I_j} f^- \inf_{I_j} f^- + \sup_{I_j} g^- - \inf_{I_j} g^-] l(I_j) \leq$$

$$S(f^+; I_j) - s(f^+; I_j) + S(g^+; I_j) - s(g^+; I_j) + S(f^-; I_j) - s(f^-; I_j) + S(g^-; I_j) - s(g^-; I_j) \leq 4\epsilon$$

Dunque $(f+g)^+$ é integrabile e tale riesce, allo stesso modo $(f+g)^-$.

Infine, proviamo che $I(f+g) = I(f) + I(g)$. Da $f^+ - f^- + g^+ - g^- = f + g = (f+g)^+ - (f+g)^-$, segue

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

e quindi, da (ii):

$$I((f+g)^+) + I(f^-) + I(g^-) = I((f+g)^-) + I(f^+) + I(g^+)$$

cioé appunto $I(f+g) = I((f+g)^+) - I((f+g)^-) = I(f^+) + I(g^+) - I(f^-) - I(g^-) = I(f) + I(g)$.

Dimostrazione Teorema 3. Siccome f^+, f^- hanno le stesse proprietá di f, supporremo $f \geq 0$.

Dall'ipotesi, esistono $M, R > 0$ ed un naturale p tali che $0 \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = 0$ per $|x| \geq R, \quad D_f \subset (-R, R)$ e p é il numero di punti in D_f. É $\overline{I}(f) \leq 2MR$. Fissato poi $\epsilon > 0$, siano $I_j, j = 1, \ldots, p, \quad I_j \subset (-R, R)$ intervalli aperti tali che

$$D_f \subset \cup_{j=1}^{p} I_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{p} l(I_j) \leq \frac{\epsilon}{2M}.$$

Dal teorema di Heine-Cantor: esiste δ_ϵ tale che

$$x, y \notin \cup_j I_j, \qquad |x - y| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{4R}.$$

Se $I_j \subset [-R, R], j > p + 2$ sono di lunghezza minore di δ_ϵ e formano, insieme a $I_j, j = 1, \ldots, p, I_{p+1} := (-\infty, -R), I_{p+2} := (R, +\infty)$, una partizione di $\mathbf{R}$, risulta

$$0 \leq \; S(f; I_j) - s(f; I_j) \; \leq \; \sum_{j=1}^{p} \sup_{I_j} f l(I_j) + \sum_{j > p+2} (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) l(I_j) \leq$$

$$\leq M \sum_{j=1}^{p} l(I_j) \; + \frac{\epsilon}{4R} \sum_{j > p+2} l(I_j) \; \leq \frac{\epsilon}{2} \; + \frac{\epsilon}{2}.$$

Concludiamo quindi, per l'arbitrarietá di ϵ, che $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$.

Dimostrazione Proposizione 1. Basta provarlo per funzioni non negative. Sia I_j partizione di $\mathbf{R}$. Siano $J_1 := I, \quad I^c = J_2 \cup J_3$ con $J_2 \cap J_3 = \emptyset, I_{ij} = I_j \cap J_i$. Siccome $\sup_{I_{ij}} f = \sup_{I_{ij}} f \chi_{J_i}$, $\inf_{I_{ij}} f = \inf_{I_{ij}} f \chi_{J_i}, \sup_{I_{ij}} f \chi_{J_h} = 0 = \inf_{I_{ij}} f \chi_{J_i}$ se $h \neq i$, si riconosce che $S(f; I_{ij}) = S(f \chi_I, I_{ij}) + S(f \chi_{I^c}, I_{ij})$, $s(f; I_{ij}) = s(f \chi_I, I_{ij}) + s(f \chi_{I^c}, I_{ij})$ e quindi $S(f \chi_I, I_{ij}) - s(f \chi_I, I_{ij}) \leq \epsilon$ se $S(f; I_j) - s(f; I_j) \leq \epsilon$.

ESEMPIO di I_j intervalli aperti limitati e disgiunti con $\chi_{\cup_{j=1}^{\infty} I_j}$ non integrabile.

Sia $1 = r_0 > r_1 \ldots > r_n \ldots, r_n \to r > 0, \; l_n = \frac{r_n}{2^n}, \; J_{1,1} := [0, 1]$.

Sia $I_{1,1}$ l'intervallo aperto, centrato nel punto medio di $J_{1,1}$ e di lunghezza $l(I_{1,1}) = 1 - 2l_1$ (intervallo centrale). Siano $J_{2,1}, J_{2,2}$ gli intervalli ottenuti rimuovendo $I_{1,1}$ da $J_{1,1}$. Siano $I_{2,1}, I_{2,2}$ i corrispondenti intervalli centrali di lunghezza $l_1 - 2l_2$. Iterando, si costruiscono intervalli aperti $I_{n,j}, j = 1, \ldots, 2^{n-1}$ di lunghezza $l_{n-1} - 2l_n$. Risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} (l_{n-1} - 2l_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (r_{n-1} - r_n) = 1 - r$. Notiamo anche che l'aperto $O := \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{n,j}$ é denso in $[0, 1]$. Da ció segue che le somme superiori $\chi_{\cup_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{n,j}}$ valgono almeno 1, mentre ogni somma inferiore vale al piú $1 - r$.

L'insieme $[0, 1] \setminus O$ si chiama Cantor generalizzato (Cantor se $r_n = (\frac{2}{3})^n$).