Soluzioni IX

1/12/2003

Differenziabilità

Esercizio 1. Sia $f(x) = |x|^\alpha = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\alpha}{2}}$, dove $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Allora, per esempio, calcoliamo $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_1} = \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} 2x_1$. Da cui $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_i} = \alpha |x|^{\alpha-2} x_i$.

Esercizio 2. (i) Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice positivamente omogenea di grado α se $\forall t > 0$ si ha $f(tx) = t^\alpha f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se una funzione f è positivamente omogenea di grado α continua su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ non identicamente costante allora può essere estesa ad una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^n$ se e solo se $\alpha > 0$ ed inoltre $f(0) = 0$. La nostra funzione è positivamente omogenea di grado $2\alpha - \beta$: infatti si ha $f(tx) = \frac{t^{2\alpha}|x_1 x_2|^\alpha}{t^\beta |x|^\beta} = t^{2\alpha-\beta} \frac{|x_1 x_2|^a}{|x|^\beta} = t^{2\alpha-\beta} f(x)$.
Inoltre f è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ essendo composizione e prodotto di funzioni continue, quindi la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $2\alpha - \beta > 0$.
(ii) f ha derivate direzionali in x_0 se e solo se esiste finito

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\xi) - f(x_0)}{t}$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^2$.
Sia quindi $x_0 = (0, 0)$. Si ha $\lim_{t \to 0} \frac{f(t\xi)}{t} = \lim_{t \to 0} t^{2\alpha-\beta-1} f(\xi)$, e questo limite esiste se e solo se $2\alpha - \beta \geqslant 1$.
(iii) f è differenziabile in x_0 se e solo se

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) h|}{|h|} = 0.$$

Dal calcolo fatto sulle derivate direzionali si deduce che $\nabla f(x_0) = (0, 0)$, e quindi quel limite si riduce a $\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(h)|}{|h|} = \lim_{|h| \to 0} \frac{|h_1 h_2|^\alpha}{|h|^{\beta+1}} \leq \lim_{|h| \to 0} \frac{|h|^{2\alpha}}{|h|^{\beta+1}} \to 0$ se e solo se $2\alpha - \beta > 1$. Se invece fosse $2\alpha - \beta < 1$ allora non esisterebbero le derivate direzionali e quindi f non potrebbe essere differenziabile. Nel caso invece in cui $2\alpha - \beta = 1$ allora posso prendere la successione $h_n = (1/n, 1/n)$ e il limite è diverso da 0.
Riassumendo si ha:
(i) $2\alpha - \beta > 0$;
(ii) $2\alpha - \beta \geqslant 1$;
(iii) $2\alpha - \beta > 1$.

Esercizio 3. (i) Questa funzione si può immaginare come un paraboloide con vertice nel punto (0,0,1) e concavità rivolta verso il basso se $|x| < 1$, al di fuori di questo insieme f è costantemente nulla. f è ovviamente continua per $|x| < 1$, essendo composizione e somma di funzioni continue. Se $|x| > 1$ allora la funzione essendo costante è continua. Studiamo che succede per $|x| = 1$. Sia $x_0 : |x_0| = 1$, $\epsilon > 0$, voglio vedere se $\exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ se $|x - x_0| < \delta$. Dobbiamo distinguere due casi: il primo, ovvio, in cui $|x| \geqslant 1$ e il secondo in cui $|x| < 1$. Se $|x| \geqslant 1$ allora $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$ per ogni ϵ e δ. Se $|x| < 1$ si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |1 - |x|^2| = |1 - |x||(1 + |x|) \\ &\leq 2(|1 - |x_0|| + ||x_0| - |x||) \\ &\leq 2|x - x_0| < 2\delta = \epsilon. \end{aligned}$$

Prendendo $\delta = \epsilon/2$ si dimostra che la funzione è continua in $\mathbb{R}^2$.
Studiamo la differenziabilità in x_0 con $|x_0| = 1$, vediamo se

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h|}{|h|} = 0.$$

Dove $\nabla f(x_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0))$. Ora si può vedere che

$$\frac{\partial f}{x_i}(x) = \begin{cases} -2x_i & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

Prendiamo, per esempio, la successione $h_n = -x_0/n$.
Allora

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|f(x_0 - h_n) - f(x_0) + \nabla f(x_0)h_n|}{|-h_n|} = \lim_{n \to \infty} 2 - 1/n = 2 \neq 0.$$

Quindi la funzione non è differenziabile in x_0 se $|x_0| = 1$. Se $|x_0| < 1$ e $|h|$ sufficientemente piccolo in modo che sia $|x_0 + h| < 1$ si ha

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h|}{|h|} = \lim_{|h| \to 0} \frac{|1 - |x_0 + h|^2 - 1 + |x_0| + 2x_0 h|}{|h|}$$

$$= \lim_{|h| \to 0} \frac{||x_0|^2 + |h|^2 + 2x_0 h - |x_0|^2 - 2x_0 h|}{|h|} = \lim_{|h| \to 0} |h| = 0.$$

Se, invece $|x_0| > 1$ e $|x_0 + h| > 1$ si ha

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h|}{|h|} = \lim_{|h| \to 0} \frac{0}{|h|} = 0.$$

La funzione risulta quindi differenziabile $\forall x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$.
(ii) Abbiamo trovato $\delta = \epsilon/2$ quindi se $\epsilon = 1/100$ basta prendere $\delta = 1/200$.
(iii) Sia $x_0 = (\sqrt{2}, 1)$, allora $|x_0| = \sqrt{3} > 1$ quindi, per quanto visto nel primo punto, la funzione è differenziabile in x_0.

Esercizio 4. (i) Sia $(x_0, y_0) = (1, 0)$, e sia $\epsilon > 0$ voglio vedere se $\exists \delta > 0 : |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$ se $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$. Abbiamo quindi $|(x-1, y)| < \delta$, quindi in particolare $|y| < \delta$. Ora $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |f(x, y)| \leq \frac{|y|}{e^{(\frac{y}{x-1})^2}} \leq |y| < \delta = \epsilon$. Se prendo quindi $\delta = \epsilon$ dimostro che la funzione è continua in (1,0).
Calcoliamo le derivate direzionali in (1,0), se esistono. Prendo $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ con $\xi_1 \neq 0$ Avremo quindi, in questo caso, $\lim_{t\to 0} \frac{f(1+t\xi_1, t\xi_2) - f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\xi_2 e^{-(\frac{t\xi_2}{t\xi_1})^2}}{t} = \xi_2 e^{-(\frac{\xi_2}{\xi_1})^2}$. Mentre se $\xi = (0, \xi_2)$, avremo $\lim_{t\to 0} \frac{f(1, t\xi_2) - f(1,0)}{t} = 0$. Allora

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \begin{cases} \xi_2 e^{-(\frac{\xi_2}{\xi_1})^2} & \text{se } \xi_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } \xi_1 = 0 \end{cases}$$

Da cui si deduce che esistono tutte le derivate direzionali. Calcoliamo ora $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$. Dallo studio fatto sulle derivate direzionali si ha $\nabla f = (0, 0)$. Studiamo la differenziabilità in (1,0):

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(1+h_1, h_2) - f(1,0) - \nabla f(1,0)h|}{|h|} = \lim_{|h|\to 0} \begin{cases} \frac{h_2 e^{-(\frac{h_2}{h_1})^2}}{|h|} & \text{se } h_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } h_1 = 0 \end{cases}$$

Si vede che il valore di questo limite dipende da h. Infatti se $h = (1/n, 1/n)$ il limite è $\frac{1}{e\sqrt{2}} \neq 0$. Quindi la funzione non è differenziabile in (0,1).
(ii) Sia $(x_0, y_0) = (1, 1)$ allora per definizione $f(1, 1) = 0$ devo quindi studiare $|f(x, y)|$ con $|(x, y) - (1, 1)| = |(x-1, y-1)| < \delta$. Osserviamo che, se $\delta < 1/2$, $|y-1| < 1/2 \Rightarrow 1/2 < y < 3/2$ e $|x-1| < \delta$. Allora $|f(x, y)| = \frac{|y|}{e^{(\frac{y}{x-1})^2}} < \frac{3}{2e^{\frac{1}{4\delta^2}}} = 1/100 \Leftrightarrow \delta = 1\sqrt{\frac{-1}{4\log(1/150)}}$.

Esercizio 5. La funzione è continua se $x \neq 0$, vediamo che succede se $x = 0$. Prendiamo il punto $(0, y)$ e una qualsiasi direzione $\xi \in \mathbb{R}^2$, vorrei che $\lim_{t\to 0} f(0 + t\xi_1, y + t\xi_2) = f(0, y) \Leftrightarrow \lim_{t\to 0}(t\xi_1)^2 + (y + t\xi_2^2) - y = 0 \Leftrightarrow y = 0, 1$. Questo non basta però per concludere che la funzione è continua nei punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$, ma basta a concludere che non ci sono altri punti

dove la funzione può essere continua. Dobbiamo quindi studiare "a mano" la continuità in questi punti. Iniziamo dall'origine: sia $|(x,y)-(0,0)|<\delta$ con $x\neq 0$ allora $|f(x,y)-f(0,0)|=|x^2+y^2|<\delta^2=\epsilon$ se $\delta=\sqrt{\epsilon}$, mentre se $x=0$ si ha $|f(x,y)-f(0,0)|=|y|<\delta=\epsilon$ prendendo quindi $\delta=\min\{\epsilon,\sqrt{\epsilon}\}$, si verifica la continuità in (0,0). Consideriamo il punto (0,1) e distinguiamo, come prima i due casi: $x\neq 0$ e $x=0$. Nel primo si ha $|f(x,y)-f(0,1)|=|x^2+y^2-1|=||(x,y)|^2-|(0,1)|^2|=(|(x,y)|+|(0,1)|)||(x,y)|-|(0,1)||\leq 2|(x,y)-(0,1)|<2\delta=\epsilon$ se per esempio $\delta=\min\{1,\epsilon/2\}$. Nel secondo $|f(x,y)-f(0,1)|=|y-1|<\delta$. Possiamo riassumere tutti i casi prendendo $\delta=\min\{1,\epsilon/2\}$, con questa scelta si dimostra che la funzione è continua anche in (0,1).
Studiamo le derivate direzionali:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\xi_1,y+t\xi_2)-f(0,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\begin{cases}t(\xi_1^2+\xi_2^2)+\frac{y^2-y}{t}+2y\xi_2 & \text{se } \xi_1\neq 0\\ \xi_2 & \text{se } \xi_1=0\end{cases}$$

esiste se e solo se $y=0,1$ e in tali caso si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\begin{cases}2y\xi_2 & \text{se } \xi_1\neq 0\\ \xi_2 & \text{se } \xi_1=0\end{cases}$$

Calcoliamo ora le derivate parziali nei punti (0,0) e (0,1): $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=1$ con $y=0,1$. Vediamo quindi la differenziabilità, in (0,0).

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)h|}{|h|}=\lim_{|h|\to 0}\begin{cases}\frac{|h_1^2+h_2^2-h_2|}{|h|} & \text{se } h_1\neq 0\\ 0 & \text{se } h_1=0\end{cases}$$

Si vede chiaramente che questo limite dipende dalla scelta di h: infatti scegliendo $h=(0,1/n)$ il limite è -1. Se consideriamo il punto (0,1) si avrà

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{|f(h_1,1+h_2)-f(0,1)-\nabla f(0,1)h|}{|h|}=\lim_{|h|\to 0}\begin{cases}\frac{|h_1^2+h_2^2+2h_2-h_2|}{|h|} & \text{se } h_1\neq 0\\ 0 & \text{se } h_1=0\end{cases}$$

Anche in questo caso se scegliamo la successioni $h=(0,1/n)$ vediamo che il limite non è 0. Quindi la funzione non è differenziabile per $x=0$ mentre lo è per $x\neq 0$; infatti in questo caso $\nabla f(x,y)=(2x,2y)$ allora

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{|f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y)-\nabla f(x,y)h|}{|h|}=\lim_{|h|\to 0}\frac{|h|^2}{|h|}=0.$$