Soluzioni V

20/10/2003

Serie di Potenza e

Suceesioni di Funzioni

Esercizio 1. (1) Poniamo

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n(3n-1)}$$

e applichiamo il criterio del rapporto a u_n:

$$\Big|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\Big| = \frac{|x-1|^{n+1}}{2^{n+1}(3n+3-1)} \frac{2^n(3n-1)}{(-1)^n|x-1|^n} = \frac{|x-1|}{2}\frac{3n-1}{3n+2},$$

e passando al limite si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \Big|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\Big| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|}{2}\frac{3n-1}{3n+2} = \frac{|x-1|}{2}.$$

Quindi la serie converge se

$$\frac{|x-1|}{2} < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

Per $x = 3$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$$

che converge per il critrio di Liebnitz. Per $x = -1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$$

che diverge. In conclusione la serie diverge puntualmente per $-1 < x \leq 3$.
(2) Poniamo

$$u_n(x) = \frac{(xn)^n}{n!}$$

e applichiamo ancora il criterio del rapporto:

$$\Big|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\Big| = \frac{|x|^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n n^n} = |x| \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

passando al limite otteniamo

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x|e$$

Quindi la serie converge se $|x| < e^{-1}$.
(3) Poniamo

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n^3}$$

e applichiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n^3}} \to_{n\to\infty} |x|.$$

Quindi la serie converge se $|x| < 1$. Mentre se $x = \pm 1$ si ha che

$$|u_n(x)| = \frac{1}{n^3}$$

che corrisponde al termine n-esimo di una serie armonica generalizzata di ordine 3 e quindi converge. In conclusione la serie converge se $|x| \leq 1$.

Esercizio 2. (1) Pongo

$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{n+x^{2n}}.$$

Se $|x| > 1$ allora si ha

$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^{2n}}\frac{\frac{1}{x^n}+1}{\frac{n}{x^{2n}}+1} = \frac{1}{x^n}\frac{\frac{1}{x^n}+1}{\frac{n}{x^{2n}}+1} \to_n 0.$$

Se $x = 1$ abbiamo $f_n(x) = \frac{2}{n+1} \to_n 0$. Se $x = -1$ abbiamo $0 \leqslant f_n(-1) \leqslant \frac{2}{n+1}$ e quindi $f_n(-1) \to_n 0$. Ora se $|x| < 1$ abbiamo che $|f_n(x)| \leqslant \frac{2}{n}$ e quindi converge a 0. Dalle considerazioni fatte possiamo dedurre che per $|x| \leqslant 1$ $f_n(x) \leqslant \frac{2}{n} \to_n 0$ uniformemente. Vediamo quindi se $f_n \to_n 0$ uniformente su $\mathbb{R}$. Dobbiamo quindi studiare $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)|$.
Distinguiamo due casi: n pari e n dispari. Se n è pari $f_n(x)$ è pari e strettamente positiva. Grazie allo studio della derivata prima otteniamo che la funzione ammette tre punti di singolarità: $x_1 = -\sqrt[n]{-1+\sqrt{n+1}}$, $x_0 = 0$, $x_2 = -x_1$, dove x_1 e x_2 sono punti di massimo e x_0 di minimo. Quindi $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(x_2) = \frac{\sqrt{n+1}}{2(n+\sqrt{n+1})} \to_n 0$. Se n è dispari $f_n(x) \leqslant 0$ se $x \leqslant -1$ e $f_n(x) > 0$ se $x > -1$. Anche in questo caso la funzione ha tre punti di singolarità: $x_1 = \sqrt[n]{-1-\sqrt{n+1}}$, $x_0 = 0$, $x_2 = \sqrt[n]{-1+\sqrt{n+1}}$, dove

x_1 è un punto di minimo (ma $f_n(x_1) < 0$), x_2 è un punto di massimo (e $f_n(x_2) > 0$), mentre x_0 è un flesso. Dunque $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(x_2) = |f_n(x_1)| = \frac{\sqrt{n+1}}{2(n+\sqrt{n+1})} \to_n 0$. Da cui si deduce che la funzione converge uniformemente su $\mathbb{R}$ e quindi anche in $[1, +\infty)$.

(2) Pongo $f_n(x) = \frac{1+x^{2n}}{n+x^{2n}}$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \leqslant 1; \\ 1 & \text{se } |x| > 1; \end{cases}$$

Per quanto riguarda la convergenza uniforme in $[-1, 1]$ possiamo affermare che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

e quindi converge uniformemente. La funzione $f_n(x)$ non può convergere uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ perchè il suo limite puntuale $f(x)$ non è continuo per $|x| = 1$.

(3) Pongo $f_n(x) = n^{n^x} = e^{n^x \log n}$.
Osserviamo che la funzione $f_n(x)$ e crescente in x e che $f_n(x) > 1 \, \forall x$. Ora se $x \geqslant 0$ si ha $f_n(x) \geqslant n \to_n \infty$. Mentre se $x < 0$ poniamo $y = -x > 0$ e quindi possiamo scrivere $f_n(y) = e^{\frac{\log n}{n^y}} \to 1^+$. Si ha quindi convergenza puntuale in $E = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ e $\lim_n f_n(x) = 1$. Studiamo la convergenza uniforme in $[-r, 0]$ con $r > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[-r,0]} |f_n(x) - f| = \lim_{n\to\infty} \sup_{[-r,0]} (n^{n^x} - 1) = \lim_{n\to\infty} n - 1 = \infty.$$

Quindi non si ha convergenza uniforme in $[-r, 0]$, e analogamente in qualsiasi insieme che contenga lo 0. Proviamo a restringerci all'insieme $(-\infty, -\epsilon]$ con $\epsilon > 0$, in modo da isolare lo 0.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(-\infty,-\epsilon]} |f_n(x) - f| = \lim_{n\to\infty} (e^{\frac{\log n}{n^\epsilon}} - 1) = 0.$$

Riassumendo la funzione $f_n(x)$ converge uniformemente a 1 nell'insieme $(-\infty, -\epsilon]$ con $\epsilon > 0$.