Soluzioni III

5/10/2003

Integrali estesi ad una semiretta

Risolvere i seguenti integrali:

Esercizio 1. Si ha che $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$, ed è integrabile se e solo se

$$\lim_{x\to\infty} I(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt < \infty.$$

Ora

$$I(x) = \arctan x - \arctan 0 = \arctan x,$$

quindi

$$\lim_{x\to\infty} I(x) = \frac{\pi}{2} < \infty.$$

Si ha perciò

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 2. Osserviamo che $\frac{1}{t^\alpha} > 0$ se $t > 1$ per ogni α. Poniamo allora

$$I_\alpha(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Per $\alpha \neq 1$, si ha che

$$I_\alpha(x) = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Per $\alpha > 1$

$$\lim_{x\to\infty} I_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha-1} < \infty$$

e quindi

$$I = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Esercizio 3. Poniamo, come nell'esercizio precedente

$$I_\alpha(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha},$$

ma in questo caso

$$\lim_{x\to\infty} I_\alpha(x) = \infty,$$

e quindi la funzione non è integrabile.

Esercizio 4. Poniamo

$$I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \log x - \log 1 = \log x.$$

Ora

$$\lim_{x\to\infty} I(x) = \infty,$$

e quindi la funzione non è integrabile.

Esercizio 5. Poniamo

$$I_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt.$$

Si ha che

$$I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} I_n(x) + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}.$$

Ora

$$I_{n+1} = \lim_{x\to\infty} I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} I_n$$

e, dal primo esercizio,

$$I_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Iterando, si ottiene

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n = \frac{2n-1}{2n}\frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} I_{n-1} = \cdots = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 6. Si ha che

$$\frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}}t^{n-2}$$

quindi risolviamo l'integrale per parti ponendo

$$g'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}} \text{ e } f(t) = t^{n-2}.$$

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}}\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{n}\frac{t^{n-2}}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}\Big|_0^x + \frac{2(n-2)}{n}\int_0^x \frac{t^{n-3}}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}\right] \\ &= \frac{1}{n}\frac{x^{n-2}}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} + \frac{n-2}{n}I_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Passando al limite si ha

$$I_n = \lim_{x\to\infty} I_n(x) = \frac{n-2}{n}I_{n-2}.$$

Ora calcoliamo I_1, ponendo $t = \sinh y$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{x\to\infty} I_1(x) = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^{\operatorname{arcsinh} x} \frac{\cosh y}{(\sqrt{1+\sinh^2 y})^3}\,dy \\ &= \lim_{x\to\infty}\int_0^{\operatorname{arcsinh} x} \frac{dy}{\cosh^2 y} = \lim_{x\to\infty} \tanh y\Big|_0^{\operatorname{arcsinh} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh y}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}\Big|_0^{\operatorname{arcsinh} x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1. \end{aligned}$$

Mentre

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{x\to\infty} I_2(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+t^2}\Big|_0^x \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ora se n è pari si ha che:

$$I_n = \frac{n-2}{n}I_{n-2} = \frac{n-2}{n}\frac{n-4}{n-2}I_{n-4} = \cdots = \frac{2}{n}I_2 = \frac{1}{n},$$

mentre se n è dispari

$$I_n = \frac{n-2}{n}I_{n-2} = \frac{n-2}{n}\frac{n-4}{n-2}I_{n-4} = \cdots = \frac{1}{n}I_1 = \frac{1}{n}.$$

In entrambi i casi

$$I_n = \frac{1}{n}.$$